Valeurs d'adhérence de $(\cos(n))_{n\in\mathbf{N}}$

Lucien Hennecart

Cet énoncé est dévolu à une proposition de démonstration du fait que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbf{N}}$ a pour ensemble de valeurs d'adhérence $[-1,1]$, suivie de quelques variations. Cette question est assez difficile pour être intéressante et nécessite des outils variés, mais relativement élémentaires. J'ai essayé autant que possible de les rendre très accessibles.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbf{R}$ celui des nombres réels.

1 Densité

Si $A \subset \mathbf{R}$ est une partie de $\mathbf{R}$, on dit que A est dense dans $\mathbf{R}$ si tout élément de $\mathbf{R}$ est aussi proche que l'on veut d'un élément de A. De façon mathématique [1]

$$A \text{ est dense dans } \mathbf{R} \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } |x-a| < \varepsilon.$$

Cela est équivalent au fait que tout élément de $\mathbf{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A. En termes mathématiques, on écrit :

$$A \text{ est dense dans } \mathbf{R} \iff \forall x \in \mathbf{R}, \exists (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} u_n = a.$$

1. Montrer cette équivalence.

2 Sous-groupes additifs de R

Un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ est une partie A de $\mathbf{R}$ non vide et stable par différence, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in A$, $x-y \in A$. Vous n'apprendrez pas cette année ce que sont les groupes de façon générale, bien que ce soient des objets mathématiques de première importance, mais cela ne nous empêchera pas de continuer.

Sauriez-vous donner des exemples de sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$?

Montrer qu'un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ contient 0, est stable par somme ($x, y \in A \implies x+y \in A$) et passage à l'opposé ($x \in A \implies -x \in A$).

On se propose maintenant de montrer une propriété fondamentale les concernant.

Proposition 2.1. *Soit A un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. Alors*

1. *Soit A est dense dans $\mathbf{R}$,*
2. *Soit il existe $a \in A$ tel que $A = a\mathbf{Z} \overset{def}{=} \{an : n \in \mathbf{Z}\}$. (On dit que A est monogène).*

On veut montrer cette proposition.

1. (très facile) Montrer la proposition si $A = \{0\}$.
2. On suppose dans le reste des questions que $A \neq \{0\}$. Montrer que $A \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$. *(Indication : on peut faire des soustractions dans A)*
3. Soit $a = \inf A \cap \mathbf{R}_+^*$. Pourquoi est-ce bien défini ?

1. Le symbole utilisé, $\overset{\text{def}}{\iff}$, n'est pas une équivalence. Il est utilisé pour définir le membre de gauche par la propriété mathématique à droite du symbole.

4. Montrer que si $a > 0$, alors $A = a\,\mathbf{Z}$. *(Indication : Montrer que si $x \in A$, il existe un unique $n \in \mathbf{Z}$ tel que $na \leq x < (n+1)a$ et utiliser la structure additive de A pour montrer qu'alors, $x = na$ en obtenant une contradiction si tel n'est pas le cas.)*
5. Montrer que si $a = 0$, alors A est dense dans $\mathbf{R}$. *(Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a' \in A$ tel que $0 < a' < \epsilon$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $na' \leq x < (n+1)a'$. Conclure.)*

3 Valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbf{N}}$.

On veut montrer le résultat dont on parle dans l'introduction, à savoir que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est $[-1,1]$.

1. Montrer que $A = \mathbf{Z} + 2\pi\,\mathbf{Z} \overset{\text{def}}{=} \{c + 2\pi d : c, d \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$. *(On suppose connu le fait que π est irrationnel).*
2. Soit $x \in [-1,1]$. On va montrer dans la suite que x est valeur d'adhérence de $(\cos(n))_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\cos\theta = x$.
3. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers θ.
4. Montrer que dans la question précédente, on peut trouver une telle suite prenant un nombre infini de valeurs différentes. On note $(\alpha_n + 2\pi\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{Z}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ une telle suite.
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\alpha_n) = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(-\alpha_n) = x$.
6. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend une infinité de valeurs différentes. *(Indication : Raisonner par l'absurde : montrer que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend un nombre fini de valeurs, alors $(\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\} + 2\pi\,\mathbf{Z}) \cap [\theta - 1, \theta + 1]$ est fini. En déduire une constradiction.)* En déduire que l'une des deux suites d'entiers $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(-\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend une infinité de valeurs positives deux à deux distinctes. On suppose dans la suite qu'il s'agit de $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
7. Montrer que l'on peut extraire de $(\alpha_n)_n$ une suite $(\alpha_{\varphi(n)})_n$ strictement croissante.
8. Conclure.

4 Valeurs d'adhérence des suites $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\tan(n))_{n\in\mathbf{N}}$

De façon un peu perturbante, c'est un peu plus compliqué que prévu. Celà vient du fait que les fonctions sin et tan sont impaires.

1. En utilisant le fait que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ et en s'inspirant de la section précédente, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est $[-1,1]$.
2. On va montrer dans cette question un raffinement de la Question 1 de la Section 3, plus précisément que $\mathbf{N} + 2\pi\,\mathbf{Z}$ et $-\mathbf{N} + 2\pi\,\mathbf{Z}$ sont denses dans $\mathbf{R}$. On note $E = \mathbf{N} + 2\pi\,\mathbf{Z}$ et $B = -\mathbf{N} + 2\pi\,\mathbf{Z}$. On note maintenant

$$\bar{E} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ est limite d'une suite d'éléments de } E\}$$

et de façon similaire,

$$\bar{F} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ est limite d'une suite d'éléments de } F\}.$$

(On appelle $\bar{E}$ l'adhérence de E). Des définitions, il découle que E est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si $\bar{E} = \mathbf{R}$, de même pour F. Le but de cette question est donc de montrer que $\bar{E} = \bar{F} = \mathbf{R}$.

(a) Montrer que $\bar{E} = -\bar{F} \overset{\text{def}}{=} \{-x : x \in F\}$. En déduire qu'il suffit de montrer que $\bar{E} = \mathbf{R}$.

(b) Montrer que $\bar{E} \cup \bar{F} = \mathbf{R}$. En déduire que $\mathbf{R} \setminus \bar{E} \subset \bar{F}$.
Supposons maintenant que $\bar{E} \neq \mathbf{R}$, par l'absurde. Montrer qu'il existe un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $a < b$ dans $\mathbf{R} \setminus \bar{E}$.

(c) Montrer que pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $[ra, rb[\subset \bar{F}$.

(d) Montrer que $\bar{F} = \mathbf{R}$. *(Indication : Choisir r tel que $r(b-a) > 2\pi$ et utiliser après l'avoir démontré que $\bar{F}$ est stable par translation par des multiples de 2π, c'est-à-dire $\bar{F} + 2\pi\,\mathbf{Z} = \bar{F}$.)*

(e) Conclure que $\bar{E} = \mathbf{R}$ et obtenir une contradiction avec l'hypothèse faite dans la question (b). En déduire que $\bar{E} = \mathbf{R}$.

3. En s'inspirant de la Section 3 et en utilisant la question précédente, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est $\mathbf{R}$.
4. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $([\tan(n)])_{n\in\mathbf{N}}$ est $\mathbf{Z}$.

Remarque 4.1. *Le seule chose de spéciale concernant les fonctions* $\cos, \sin$ *et* $\tan$ *faisant que tout cela marche est qu'elles sont continues et ont une période irrationnelle : on peut montrer exactement avec la même méthode que pour une fonction $f : \mathbf{R} \setminus A \to \mathbf{R}$ continue ayant une période irrationnelle, où A est une partie $\mathbf{R}$ telle que $A \cap \mathbf{N}$ soit fini (par exemple $A = \frac{\pi}{2} + \pi\,\mathbf{Z}$ pour* $\tan$*), l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est $f(\mathbf{R})$, l'image de f.*