Méthodes pour le cours d'algèbre linéaire
Partie 2 : Espaces vectoriels, matrices et applications linéaires

Lucien Hennecart

12 avril 2019

Ce document donne des méthodes, illustrées par des exemples, pour répondre aux diverses questions qui se posent en algèbre linéaire. Il faut bien sûr connaître ces méthodes sur le bout des doigts. Une méthode présente le défaut de paraître répétitive : on a le sentiment d'appliquer une recette. Mais une méthode donne un procédé certain et structuré pour répondre à une question qui cache un aspect algorithmique : un ordinateur peut répondre correctement à toutes ces questions. Ceci est un énorme avantage puisque cela économise notre imagination et notre réflexion. Parfois, dans certaines situations, il faudra adapter ces méthodes ou savoir s'en libérer : il faut prendre aussi conscience de leur limites et du cadre précis dans lequel elles s'appliquent, ce qui nécessite d'en avoir une bonne maîtrise. Parfois, il est clair que la méthode donnée donne le résultat voulu ; parfois, c'est un peu moins clair, autrement dit il faut démontrer que la méthode donne ce que l'on veut. Le cours contient beaucoup d'autres exemples rédigés avec soin : je vous conseille notamment d'étudier minutieusement la rédaction donnée.

1 Trouver une base de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels

Cette section apparaît dans une mise à jour de la première feuille de méthodes. Comme elle est importante, elle est recopiée ici.

Soit E un espace vectoriel, $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l$ des vecteurs de E, $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_l)$. Pour déterminer une base de $F \cap G$,

1. On résout le système d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l$:
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{l} \mu_i w_i,$$
2. On exprime l'ensemble des solutions sous forme paramétrique,
3. On exprime $F \cap G$ sous forme paramétrique,
4. On détermine une base de G.

Exemple 1.1. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 1, 2), w_1 = (0, 1, 1), w_2 = (1, 0, 0)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$. Déterminer une base de $F \cap G$.

Solution : On résout le système d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$$

c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 = 0 \end{cases}.$$

Ce sytème est équivalent au système sous forme échelonnée réduite suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 \quad - \mu_1 \quad = 0 \\ \quad \lambda_2 + \mu_1 \quad = 0 \\ \qquad\quad \mu_2 = 0 \end{cases}.$$

L'ensemble des solution est $\{(\mu_1, -\mu_1, \mu_1, 0) : \mu_1 \in \mathbb{R}\}$. Donc

$$F \cap G = \{\mu_1 v_1 - \mu_1 v_2 : \mu_1 \in \mathbb{R}\} = \{\mu_1(0, 1, 1) : \mu_1 \in \mathbb{R}\}.$$

La famille $((0, 1, 1))$ est donc une base de $F \cap G$.

2 Trouver un supplémentaire d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E. Trouver un supplémentaire de F dans E.

1. On détermine une base B de F,
2. On complète B avec des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ pour former une base de E,
3. $G = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ est un supplémentaire de F dans E.

3 Montrer qu'une application est linéaire

Soit $f : E \to F$ une application.

1. On vérifie, si ce n'est pas complètement évident, que E et F sont des espaces vectoriels,
2. On vérifie que $f(0_E) = 0_F$,
3. Pour $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in F$, on vérifie que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

4 Matrices élémentaires et calculs

Les matrices élémentaires ont une grande importance. Nous les définissons ici.

4.1 Les matrices élémentaires

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. La base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ est $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ où

   $$E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le l \le n}}$$

   est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui placé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne. On a utilisé ici le symbole de Kronecker,
2. Pour $\lambda \in K \setminus \{0\}$ et $i \neq j$, on définit la matrice carrée $E_{i,j}(\lambda) \in \mathcal{M}_m(K)$ par

   $$E_{i,j}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}.$$

   Une telle matrice est appelée *matrice de transvection*.
3. Pour $\lambda \in K \setminus \{0\}$ et $1 \le i \le m$,

   $$D_i(\lambda) = I_m + (\lambda - 1)E_{i,j}$$

   est la matrice diagonale de taille $m \times m$, dont les coefficients diagonaux valent tous 1 sauf celui en position (i, i) qui vaut λ.

4. Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$. On définit la matrice $T_{i,j} \in \mathcal{M}_m(K)$ par :

$$(T_{i,j})_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \text{ et } k \neq i, j \\ 1 & \text{si } k = j \text{ et } l = i \text{ ou } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Bien que la notation ne fasse pas apparaître les entiers m et n, les matrices $E_{i,j}$, dépendent de m et n et les matrices $E_{i,j}(\lambda)$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}$ dépendent de m.

4.2 Calculs

Ici, on voit que les opérations élémentaires sur les matrices peuvent s'obtenir grâce à des multiplications matricielles.

Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Soit $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K$. On voit ici toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}, E_{i,j}(\lambda), D_i(\lambda), T_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_m(K)$. Donner le résultat des calculs suivants.

1. $E_{i,j}M =$
2. $E_{i,j}(\lambda)M =$
3. $D_i(\lambda)M =$
4. $T_{i,j}M =$

Les calculs suivants montrent l'effet de la multiplication à droite par une matrice élémentaire. On voit ici toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}, E_{i,j}(\lambda), D_i(\lambda), T_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_n(K)$.

1. $ME_{i,j} =$
2. $ME_{i,j}(\lambda) =$
3. $MD_i(\lambda) =$
4. $MT_{i,j} =$

5 Déterminer si une matrice carrée est inversible et (le cas échéant) calculer son inverse

Voir aussi la Section 3.3.4 du cours.

5.1 Déterminer si une matrice carrée est inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On échelonne la matrice A grâce aux opérations élémentaires. Celle-ci est inversible si et seulement si la matrice obtenue n'a pas de ligne nulle.

Exemple 5.1. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Réponse :

On échelonne la matrice comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée sans ligne nulle donc la matrice A est inversible.

Exemple 5.2. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
est-elle inversible ?

Réponse :

On échelonne la matrice comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice échelonnée dont la dernière ligne est nulle donc la matrice A n'est pas inversible.

5.2 Calculer l'inverse d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée inversible de taille $n \times n$.

1. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} A & | & I_n \end{pmatrix}$,
2. On réalise les opérations sur les lignes permettant de mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite,
3. La partie à droite de la barre verticale donne l'inverse de A.

Exemple 5.3. Inverser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : On met la matrice suivante sous forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

On en déduit que A est inversible et que sont inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il est vivement recommandé de vérifier au brouillon que $AA^{-1} = I_3$ pour détecter une éventuelle erreur de calcul.

6 Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire

6.1 Déterminer la dimension du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. On écrit la matrice de f dans des bases quelconques de E et F, c'est une matrice de taille $\dim F \times \dim E$,
2. On échelonne cette matrice,
3. Le nombre de ligne non nulles, qui est aussi le nombre de pivots non nuls, est la dimension de l'image de f, c'est-à-dire le rang de f et la dimension du noyau de f est $\dim E - \operatorname{rg} f$.

6.2 Déterminer une base du noyau d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire de matrice A dans des bases de E et F. Une base du noyau de f est donnée par une base de l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0$.

6.3 Déterminer une base de l'image d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire de matrice A dans des bases de E et F.

1. On échelonne A,
2. Les indices des colonnes dans lesquelles il y a un pivot non nul donnent les colonnes de A à prendre pour former une base de $\operatorname{im} f$.

6.4 Pourquoi ça marche ?

1. Les colonnes de la matrice A donnent une famille génératrice de $\operatorname{im} f$,
2. Le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée est égal au nombre de pivots non nuls,
3. Par la méthode d'extraction de base, la dimension de $\operatorname{im} f$ est égale au nombre de pivots non nuls donc au nombre de lignes non nulles,
4. Par le théorème du rang, $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$.

7 Déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $B = (u_1, \dots, u_r)$ une base de E et $B' = (v_1, \dots, v_s)$ une base de F. La matrice de f dans les bases B et B' est la matrice obtenue en écrivant en colonnes les décompositions des vecteurs $(f(u_1), \dots, f(u_r))$ dans la base B'.

Exemple 7.1. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ & & P & \mapsto & P' + P(0) \end{array}.$$

Écrire la matrice de f dans les bases $B = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $B' = (1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.

Solution : On remarque d'abord que f est bien définie car dériver un polynôme non constant baisse le degré de 1 et que f est linéaire (à vérifier). On calcule :

$$f(1) = 0 + 1 = 1 \tag{1}$$
$$f(X) = 1 + 0 = 1 \tag{2}$$
$$f(X^2) = 2X + 0 = 2X \tag{3}$$

donc la matrice de f dans les bases données est :

$$\mathrm{Mat}_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8 Montrer qu'une application linéaire est ou n'est pas injective/surjective/bijective

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies.

8.1 Injectivité

On observe d'abord le fait suivant :

$$\text{Si } \dim F < \dim E, \text{ alors } f \text{ n'est pas injective.}$$

Bien entendu la réciproque est fausse : l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x - y, 0, 0) \end{array}$$

n'est pas injective bien que $\dim \mathbb{R}^3 \geq \dim \mathbb{R}^2$.

Pour montrer que f est injective, on calcule $\ker f$.

$$f \text{ est injective si et seulement si } \ker f = (0).$$

8.2 Surjectivité

On observe d'abord le fait suivant :

$$\text{Si } \dim F > \dim E, \text{ alors } f \text{ n'est pas surjective.}$$

Bien entendu la réciproque est fausse : l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y + z, 0) \end{array}$$

n'est pas surjective bien que $\dim \mathbb{R}^3 \geq \dim \mathbb{R}^2$.

Pour montrer que f est surjective, on détermine son image $\operatorname{im} f$ et on montre que $\operatorname{im} f = F$.

8.3 Bijectivité

Pour montrer que f est un isomorphisme, on montre l'une des choses suivantes :

$$f \text{ est injective et } \dim E = \dim F$$

ou

$$f \text{ est surjective et } \dim E = \dim F$$

ou

$$f \text{ est injective et surjective.}$$

9 Changements de bases

9.1 Formule pratique

Soit A la matrice représentant une application linéaire $f : E \to F$ dans les bases B_E de E et B_F de F. Comment déterminer la matrice A' de cette application linéaire dans d'autres bases B'_E de E et B'_F de F ?

1. On détermine les matrices de passage P_{B_E, B'_E} et P_{B_F, B'_F}
2. On calcule $A' = P^{-1}_{B_F, B'_F} A P_{B_E, B'_E}$.

9.2 Comment retenir cette formule ?

On a très vite fait d'oublier dans quel sens il faut écrire la formule de passage du paragraphe précédent. Plutôt que de se torturer à essayer de la retenir, il vaut mieux avoir un moyen de la retrouver. J'en propose un qui me paraît efficace, mais il en existe d'autres. Voilà ce qu'il faut savoir

1. P_{B_E,B'_E} est la matrice formée des vecteurs de la base B'_E écrits dans la base B_E en colonnes. En d'autres termes,
$$P_{B_E,B'_E} = \mathrm{Mat}_{B_E \leftarrow B'_E}(\mathrm{Id}_E).$$
où $\mathrm{Id}_E : E \to E$ est l'application identique,
2. $P^{-1}_{B_E,B'_E} = P_{B'_E,B_E}$.

On peut ensuite représenter la situation dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
E & \xrightarrow{\mathrm{Id}_E} & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{\mathrm{Id}_F} & F \\
B'_E & & B_E & & B_F & & B'_F \\
& P_{B_E,B'_E} & & A & & P_{B'_F,B_F} &
\end{array}$$

où la première ligne indique les applications linéaires considérées, la deuxième ligne les bases considérées et la troisième ligne la matrice de l'application linéaire de la première ligne dans les bases de la deuxième ligne. En particulier, $A = \mathrm{Mat}(f)_{B_F \leftarrow B_E}$. On a bien :

$$\mathrm{Mat}(f)_{B'_F \leftarrow B'_E} = P_{B'_F,B_F}\, \mathrm{Mat}_{B_F \leftarrow B_E}(f) P_{B_E,B'_E}.$$

La notation doit aussi aider à ne pas se tromper.

Remarque 9.1. Une matrice ne détermine une application linéaire que si l'on sait quelles bases ont été utilisées pour l'écrire. Par défaut, si les espaces vectoriels sont des $\mathbb{R}^n$ pour un entier n, il s'agit de la base canonique s'il n'y a pas de précisions supplémentaires.