Méthodes pour le cours d'algèbre linéaire
Partie 1 : Systèmes linéaires et espaces vectoriels

Lucien Hennecart

Ce document donne des méthodes, illustrées par des exemples, pour répondre aux diverses questions qui se posent en algèbre linéaire. Il faut bien sûr connaître ces méthodes sur le bout des doigts. Une méthode présente le défaut de paraître répétitive : on a le sentiment d'appliquer une recette. Mais une méthode donne un procédé certain et structuré pour répondre à une question qui cache un aspect algorithmique : un ordinateur peut répondre correctement à toutes ces questions. Ceci est un énorme avantage puisque cela économise notre imagination et notre réflexion. Parfois, dans certaines situations, il faudra adapter ces méthodes ou savoir s'en libérer : il faut prendre aussi conscience de leur limites et du cadre précis dans lequel elles s'appliquent, ce qui nécessite d'en avoir une bonne maîtrise. Parfois, il est clair que la méthode donnée donne le résultat voulu ; parfois, c'est un peu moins clair, autrement dit il faut démontrer que la méthode donne ce que l'on veut. À chaque fois que cela est nécessaire, il est fait référence au résultat du cours démontrant la validité de la méthode indiquée. Ce document ne se substitue pas au cours, il le complète. Le cours contient beaucoup d'autres exemples rédigés avec soin : je vous conseille notamment d'étudier minutieusement la rédaction donnée.

1 Ajouts

J'ai rajouté la Section 14.2 pour calculer une base de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.

Errata

Ce document, excepté cette section, est celui distribué en TD. Les erreurs repérées sont listées ci-dessous. Elles ne sont pas corrigées dans le corps du document.

- Dans la section 4.1, dans le point 1., il faut lire $0_E \in F$ et dans le point 2., $\lambda v + \mu w \in F$.
- Dans l'exemple 6.1,
$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \dots\}.$$
- Dans l'exemple 9.1, il manque une colonne dans chacun des deux systèmes. Il faut remplacer le premier système par
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \end{cases}$$
et le deuxième système par
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \qquad 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \qquad\qquad 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases}.$$
La conclusion ne change pas.
- Dans l'exemple 5.1, il faut remplacer la consigne par : Montrer que la famille $F = ((1, 3), (-1, -2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
- Il faut remplacer la deuxième phrase de la section 8 par : On résout le système d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
- Dans la dernière phrase de l'exemple 10.1, les inconnues principales sont a, b, c au lieu de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

2 Rappels

2.1 Opérations élémentaires

Il y a trois opérations élémentaires sur les systèmes linéaires :

1. Echanger deux lignes,
2. Multiplier une ligne par un scalaire non nul,
3. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.

Ce sont les trois seules opérations que l'on se permettra de réaliser sur les systèmes linéaires.

2.2 Inconnues

On dira de façon équivalente que le système suivant est d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ ou d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - \ z = 2 \\ 3x + 7y + \ z = 4 \end{cases}.$$

3 Résoudre un système linéaire

C'est, de loin, la méthode la plus importante : chacune des méthodes suivantes revient à résoudre un système linéaire. Soit $\mathcal{S}$ un système linéaire à n équations et p inconnues.

1. Si le système a au plus deux équations et deux inconnues, on peut le résoudre en se débrouillant (c'est-à-dire en utilisant les opérations élémentaires mais sans forcément échelonner le système) *sauf* si l'énoncé demande d'appliquer la méthode du pivot.
2. Résolution par la méthode du pivot (section 1.4 du cours)
   (a) On triangularise le système par la méthode du pivot : on obtient un système $\mathcal{S}'$ échelonné et équivalent à $\mathcal{S}$.
   (b) Si le système est de rang k, c'est-à-dire qu'il y a exactement k pivots non nuls, les $n-k$ dernières lignes sont de la forme $0 = a_i$ pour $n-k+1 \leq i \leq n$.
   (c) Si il existe $i \in \{n-k+1, \ldots, n\}$ tel que $a_i \neq 0$, le système est incompatible et $Sol(\mathcal{S}) = \emptyset$.
   (d) Sinon, le système est équivalent au système $\mathcal{S}''$ obtenu en effaçant les lignes de la forme $0 = 0$.
   (e) S'il n'y a pas d'inconnues secondaires, le système a une unique solution que l'on obtient en remontant les équations.
   (f) S'il y a des inconnues secondaires,
      i. On met le système $\mathcal{S}''$ sous forme échelonnée réduite
      ii. On passe les inconnues secondaires à droite
      iii. On en déduit l'ensemble des solutions.

Exemple 3.1 (Système incompatible)**.** Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - \ z = 2 \\ 3x + 7y + \ z = 4 \end{cases}.$$

Solution : L'algorithme du pivot donne le système échelonné suivant (faites le calcul !) :

$$(\mathcal{S}'') : \begin{cases} x + 3y + 2z \ = 1 \\ \quad - 2y - 5z \ = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 1 \end{cases}.$$

Donc le système $\mathcal{S}$ est incompatible et $Sol(\mathcal{S}) = \emptyset$.

Exemple 3.2 (Cas où il n'y a pas d'inconnues secondaires)**.** Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - z = 2 \\ 3x + 7y + 2z = 3 \end{cases}.$$

Solution : L'algorithme du pivot donne le système échelonné suivant (faites le calcul !) :

$$(\mathcal{S}') : \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ \quad - 2y - 5z = 0 \\ \qquad\qquad z = 0 \end{cases}.$$

Le système n'a pas d'inconnues secondaires, il est de rang 3. En remontant, on trouve $Sol(\mathcal{S}) = \{(1, 0, 0)\}$.

Exemple 3.3 (Cas où il y a des inconnues secondaires)**.** Résoudre le système d'inconnue $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a + 3b + 2c + d = 1 \\ 2a + 4b - c + d = 2 \\ 3a + 7b + c + 2d = 3 \end{cases}.$$

Solution : L'algorithme du pivot donne le système échelonné suivant (faites le calcul !) :

$$(\mathcal{S}'') : \begin{cases} a + 3b + 2c + d \;\; = 1 \\ \quad - 2b - 5c - d \;\; = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}.$$

Ce système est encore équivalent à

$$(\mathcal{S}'') : \begin{cases} a + 3b + 2c + d = 1 \\ \quad - 2b - 5c - d = 0 \end{cases}.$$

Il y a deux inconnues principales, a et b et deux inconnues secondaires, c et d. La forme échelonnée réduite du système est

$$(\mathcal{S}'') : \begin{cases} a \quad - \frac{11}{2}c - \frac{1}{2}d = 1 \\ \quad b + \;\frac{5}{2}c + \frac{1}{2}d = 0 \end{cases}.$$

On passe les inconnues secondaires à droite :

$$(\mathcal{S}'') : \begin{cases} a \;\; = 1 + \frac{11}{2}c + \frac{1}{2}d \\ \quad b = -\frac{5}{2}c - \frac{1}{2}d \end{cases}.$$

On en déduit $Sol(\mathcal{S}) = \{(1 + \frac{11}{2}c + \frac{1}{2}d, -\frac{5}{2}c - \frac{1}{2}d, c, d) : c, d \in \mathbb{R}\}$.

4 Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel

4.1 Méthode 1 : on utilise la définition

Soit E un espace vectoriel et F une partie de E.

1. On montre que $0_F \in F$
2. Soit $v, w \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On montre que $\lambda u + \mu v \in F$.

4.2 Méthode 2 : On utilise une application linéaire auxiliaire [méthode applicable quand le chapitre sur les applications linéaires aura été traité]

Dans les deux cas, on se ramène à montrer qu'une certaine fonction est une application linéaire.

4.2.1 Utilisation du noyau

On trouve un espace vectoriel G et une application linéaire $f : E \to G$ telle que $\ker f = F$.

Exemple 4.1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0\}$. Montrer que la partie F de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : La partie F est le noyau de l'application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, x - 2y). \end{array}$$

4.2.2 Utilisation de l'image

On trouve un espace vectoriel H et une application linéaire $g : H \to E$ telle que $\operatorname{im} g = F$.

Exemple 4.2. Soit $F = \{(3t + v, 4v, t) : t, v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution : En effet, F est l'image de l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t, v) & \mapsto & (3t + v, 4v, t). \end{array}$$

5 Montrer qu'une famille donnée est une famille génératrice d'un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille de k éléments de V.

5.1 Cas général

On prend $v \in V$. On résout le système d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ donné par l'équation vectorielle :

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = v.$$

Si ce système a une solution quelque soit v, la famille est génératrice de V, sinon elle ne l'est pas.

Exemple 5.1. Montrer que la famille $F = ((1, 3), (-2, -2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Solution : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On résout le système d'inconnues λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1(1,3) + \lambda_2(-1,-2) = (x,y) &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & x \\ 3\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & = & y \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & x \\ & & \lambda_2 & = & -3x + y \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & = & -2x + y \\ & & \lambda_2 & = & -3x + y \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Ce système a donc une solution, $(-2x + y, -3x + y)$ (qui s'exprime en fonction de x et y). On a

$$(x, y) = (-2x + y)(1, 3) + (-3x + y)(-1, -2),$$

et donc F est bien une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 5.2. La famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Solution : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système suivant d'inconnue $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,2,1) = (x,y,z) \iff \begin{cases} \lambda_1 \phantom{{}+\lambda_2} + \lambda_3 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = y \\ \phantom{\lambda_1 +{}} \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases} .$$

Après mise sous forme échelonnée par l'algorithme du pivot, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 \quad + \lambda_3 &= x \\ \quad \lambda_2 + \lambda_3 &= y - x \\ \qquad\qquad 0 &= z - y + x \end{cases}.$$

Ce système est incompatible si $z - y + x \neq 0$. Par exemple, si $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, ce système n'a pas de solution. En conclusion, la famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1))$ n'engendre pas $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.3. Montrer que $((2, 2), (2, 3), (2, 4))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Solution : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On résout le système :

$$\lambda_1(2,2) + \lambda_2(2,3) + \lambda_3(2,4) = (x, y) \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \qquad\quad \lambda_2 + 2\lambda_3 = y - x \end{cases}$$

Il y a deux inconnues principales, λ_1 et λ_2 et une inconnue secondaire, λ_3. On sait qu'un tel système a une infinité de solutions donc $((2, 2), (2, 3), (2, 4))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

On peut faire un peu de zèle en déterminant toutes les solutions. On met le système sous forme échelonnée réduite et on passe l'inconnue secondaire à droite :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{3x-2y}{2} + \lambda_3 \\ \lambda_2 = y - x - 2\lambda_3 \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions du système est donc

$$\left\{ \left(\frac{3x - 2y}{2} + \lambda_3, y - x - 2\lambda_3, \lambda_3 \right) : \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

5.2 Si l'on connaît une autre famille génératrice

Si on connaît une famille génératrice de V, $(w_1, \ldots, w_l)$, il suffit de réaliser le point 5.1 pour $v = w_i, 1 \leq i \leq l$. Ce n'est pas toujours plus rapide que réaliser directement le point 5.1.

Exemple 5.4. Montrer que la famille $F = ((2, 3), (-2, -2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Solution : On connaît une famille géneratrice de $\mathbb{R}^2$, $((0, 1), (1, 0))$. On a $(0, 1) = (-2, -2) + (2, 3)$ et $(1, 0) = -(2, 3) - \frac{3}{2}(-2, -2)$.

6 Trouver une base d'un (sous)-espace vectoriel

6.1 Si le sous-espace vectoriel est donné par des équations (c'est-à-dire par le noyau d'une application linéaire) [Voir aussi la section 2.7.2 du cours]

On résout le système donné par ces équations. On obtient une base de l'espace vectoriel. La description du procédé est plus claire sur un exemple.

Exemple 6.1. Donner une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 4b + 2c + d = 0, a + 5b - c + d = 0\}.$$

On résout le système

$$\begin{cases} a + 4b + 2c + d = 0 \\ a + 5b - \;\; c + d = 0 \end{cases},$$

dont F est l'ensemble des solutions. Après mise sous forme échelonnée réduite et passage des inconnues secondaires à droite, on obtient le système :

$$\begin{cases} a \ = -14c - d \\ \ b = 3c \end{cases}$$

où les inconnues principales sont a et b et les inconnues secondaires c et d. On en déduit

$$F = \{(-14c - d, 3c, c, d) : c, d \in \mathbb{R}\} = \{c(-14, 3, 1, 0) + d(-1, 0, 0, 1) : c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Une famille génératrice de F est donc $((-14, 3, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$.

6.2 Si le sous-espace vectoriel est donné par l'image d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose qu'on connait une famille génératrice de E, $(v_1, \dots, v_k)$. Alors $(f(v_1), \dots, f(v_k))$ est une famille génératrice de $\operatorname{im} f$. Pour déterminer une base de $\operatorname{im} f$, on applique le procédé d'extraction de base du point 9.

7 Trouver des équations pour un sous-espace vectoriel donné par une famille génératrice

Soit E un espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_k)$ des vecteurs de E. Déterminer des équations définissant l'espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.

Solution : Soit $v \in E$. Alors

$$v \in F \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_k v_j = v.$$

On résout donc le système d'équations d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ donné par

$$\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_k v_k = v.$$

Les lignes de la forme $0 = \star$ où $\star$ est une combinaison linéaire des coordonnées de v, donnent des équations définissant F.

Exemple 7.1. Déterminer des équations définissant le sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}((1, 1, 0), (2, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système :

$$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(2,1,1) = (x,y,z) \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & x \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & y \\ & & \lambda_2 & = & z \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & x \\ & - & \lambda_2 & = & y - x \\ & & \lambda_2 & = & z \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & = & x \\ & - & \lambda_2 & & = & y - x \\ & & & 0 & = & z + y - x \end{array} \right. .$$

On en déduit que F est défini par une seule équation, $z + y - x = 0$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z + y - x = 0\}.$$

8 Déterminer si une famille de vecteurs est libre ou liée

Soit E un espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille de vecteurs de E. On résout le système d'inconnues $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0.$$

Si ce système a une solution non nulle, la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est liée, sinon, elle est libre.

Exemple 8.1. La famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$((1,1,1),(1,2,1),(1,2,3))$$

est-elle libre ?

Solution : On résout le système

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,2,1)+\lambda_3(1,2,3)=0 \iff \begin{cases} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Après plusieurs étapes, on obtient le système échelonné suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Ce système a pour unique solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ donc la famille de vecteurs $((1,1,1),(1,2,1),(1,2,3))$ est libre.

9 Extraire une base d'une famille génératrice [proposition 2.6.12 du cours]

Soit E un espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille de vecteurs de E. Pour en extraire une base, on échelonne le système d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ correspondant à l'équation

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0.$$

On note $i_1, \ldots, i_r$ les indices des indéterminées correspondant à des pivots du système échelonné. Alors la famille $((v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ est une base de E.

Exemple 9.1. Extraire une base de $\mathbb{R}^3$ de la famille $((1,1,1),(1,3,1),(2,3,4),(1,4,5))$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,3,1)+\lambda_3(2,3,4)+\lambda_4(1,4,5)=0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Après plusieurs opérations, on obtient le système échelonné suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Les inconnues principales sont λ_1, λ_2 et λ_3 donc la sous-famille $((1,1,1),(1,3,1),(2,3,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

10 Compléter une famille libre en une base [Proposition 2.6.13 du cours]

Soit E un espace vectoriel. On suppose que $(v_1, \dots, v_k)$ est une famille libre de vecteurs de E et $(w_1, \dots, w_l)$ est une famille génératrice de E. On applique le procédé d'extraction de base de la section 9 à la famille génératrice $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l)$. Les inconnues indexées par les entiers $1, \dots, k$ sont principales donc la base obtenue contient $(v_1, \dots, v_k)$.

Exemple 10.1. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $((1,2,1),(1,1,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Complétez cette famille en une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution : On connait une base de $\mathbb{R}^3$: $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. D'après 9, on échelonne le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c & & = 0 \\ 2a+b & +d & = 0 \\ a+b & & +e = 0 \end{cases}.$$

Après mise sous forme échelonnée par la méthode du pivot, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} a+b+\ c & & = 0 \\ \ -b-2c+d & & = 0 \\ \quad -\ c & & +e = 0 \end{cases}.$$

Les inconnues principales sont λ_1, λ_2 et λ_3 et donc la famille $((1,2,1),(1,1,1),(1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

11 Trouver une base de la somme de deux (ou plus) sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On suppose que l'on connaît une famille génératrice $(v_1, \dots, v_k)$ de F et une famille génératrice $w_1, \dots, w_l$ de G. La famille $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l)$ est alors une famille génératrice de $F+G$. On applique alors le procédé d'extraction de la section 9 à cette famille.

12 Trouver des équations pour la somme de deux (ou plus) sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Pour déterminer des équations définissant $F+G$,

1. On détermine une famille génératrice (ou une base) de F et de G en utilisant éventuellement 6.1 si F ou G est donné par des équations,
2. On détermine une famille génératrice ou une base de $F+G$,
3. On trouve des équations pour $F+G$ en utilisant 7.

13 Trouver des équations pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E définis par des équations. Alors l'intersection de F et G, $F \cap G$ est définie par le système d'équations contenant les équations de F et celles de G.

Exemple 13.1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, \tag{1}$$
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\} \tag{2}$$

deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$$

est défini par les deux équations $x + y + z = 0$ et $2x + y - z = 0$.

14 Trouver une base pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels

14.1 En passant par des équations

Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels.

1. On détermine des équations pour $F \cap G$ en utilisant 13 et, si besoin, 7.
2. On détermine une base de $F \cap G$ en utilisant 6.1 et les équations de $F \cap G$ obtenues.

14.2 Méthode directe

Soit E un espace vectoriel, $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l$ des vecteurs de E, $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_l)$. Pour déterminer une base de $F \cap G$,

1. On résout le système d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l$:
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{l} \mu_i w_i,$$
2. On exprime l'ensemble des solutions sous forme paramétrique,
3. On exprime $F \cap G$ sous forme paramétrique,
4. On détermine une base de G.

Exemple 14.1. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 1, 2), w_1 = (0, 1, 1), w_2 = (1, 0, 0)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$. Déterminer une base de $F \cap G$.

Solution : On résout le système d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$$

c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 = 0 \end{cases}.$$

Ce sytème est équivalent au système sous forme échelonnée réduite suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ \lambda_2 + \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \end{cases}.$$

L'ensemble des solution est $\{(\mu_1, -\mu_1, \mu_1, 0) : \mu_1 \in \mathbb{R}\}$. Donc

$$F \cap G = \{\mu_1 v_1 - \mu_1 v_2 : \mu_1 \in \mathbb{R}\} = \{\mu_1(0, 1, 1) : \mu_1 \in \mathbb{R}\}.$$

La famille $((0, 1, 1))$ est donc une base de $F \cap G$.

15 Déterminer la dimension d'un (sous)-espace vectoriel

15.1 Si l'on connaît une famille génératrice

Soit E un espace vectoriel. Si on connaît une famille génératrice de E, on en extrait une base par le procédé 9. Son cardinal est la dimension de E.

15.2 S'il est défini par un système d'équations

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel donné par un système d'équations.

1. On échelonne le système
2. La dimension de F est le nombre d'inconnues secondaires.