

Le théorème de décomposition BPS

Montpellier, 17 décembre 2025

- 1- Le théorème de décomposition BBDG
- 2- Champs algébriques : champs lisses, champs 0 et (-1)-symplectiques
- 3- Induction de Hall cohomologique et morphisme d'intégralité
- 4- Cycles évanescents et morphisme d'intégralité
- 5- Borne cohomologique
- 6- Théorème de décomposition BPS
- 7- Applications

Motivation / Introduction

1- Le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber

X variété algébrique $/\mathbb{C}$

$\mathcal{D}_c(X)$ = catégorie dérivée des faisceaux constructibles sur X

\cup
 $\text{Perv}(X)$ sous-catégorie abélienne des faisceaux pervers

coefficients
des faisceaux/
cohomologie
= \mathbb{Q}

théorème (BBDG) Soit $Y \xrightarrow{f} X$ un morphisme propre où Y est une variété algébrique lisse. Alors $p_* \mathcal{Q}_Y$ est un complexe semi-simple:

$$p_* \mathcal{Q}_Y \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \underbrace{H^i(p_* \mathcal{Q}_Y)}_{\substack{\text{faisceau pervers} \\ \text{semi-simple}}}[-i]$$

* $\mathcal{D}_c(X)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\text{Sh}(X, \mathbb{Q}))$ des complexes de \mathbb{Q} -ev à cohomologie constructible; catégorie triangulée

* $\text{Perv}(X)$ est le coeur de la t-structure perverse
C'est une catégorie abélienne dans laquelle tout objet est de longueur finie.

* Les objets simples correspondent aux paires $(S \subset X, \mathcal{L})$
où S est une sous-variété localement fermée lisse irréductible.
et \mathcal{L} un système local simple sur S .

L'objet simple est $\mathcal{IC}(S, \mathcal{L})$ "complexe d'intersection"

C'est l'objet simple de $\text{Perv}(X)$ caractérisé par $\text{supp } \mathcal{IC}(S, \mathcal{L}) = \overline{S}$
et $\mathcal{IC}(S, \mathcal{L})|_S \cong \mathcal{L}[\dim S]$.

Problème important découlant du théorème de décomposition:

déterminer les constituants simples de
 $p_* \mathcal{O}_Y$: $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{supports, i.e. } S \subset X \text{ tq } \mathcal{F} \in \mathcal{E}(S, \mathcal{L}) \subset \mathbb{P}H^i(p_* \mathcal{O}_Y) \\ \rightarrow \text{ systèmes locaux} \end{array} \right.$

Exemple : Supports pour la fibration de Hitchin (Ngô, Laumon, Chaudouard, ...)

Aujourd'hui : théorème de décomposition effectif pour les morphismes
 $p: X \rightarrow X$ où X champ algébrique symétrique
espace algébrique = étale localement modelé sur des schémas affines.
 et X bon espace de modules

X lisse, \mathcal{O} ou (-1) -symplectique

⚠ Pas directement dans le cadre du thm de décomposition de
 BBDG : p n'est pas propre en un sens évident ; il n'est pas
 même représentable en général

\Rightarrow on s'adapte au contexte.

Exemples: ^{lisse} ① G groupe réductif e.g. $G = GL_n, Sp(2n), \dots$
 [non nécessairement connexe] G groupe fini, \dots

V représentation de G autoduale $V \cong V^*$

$$\mathcal{X} = V/G$$

$$\pi \downarrow$$

$$X = V//G := \text{Spec}(\mathbb{C}[V]^G).$$

\mathbb{C} -points de $V//G \xleftrightarrow{\text{li}} G$ -orbites fermées dans V .

$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^2 \quad t \cdot (x, y) = (tx, E^1 y) \quad \mathbb{C}^2 // \mathbb{C}^* \cong \mathbb{A}^1$

$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^4 \quad t \cdot (x, y, z, v) = (tx, ty, E^1 z, E^1 v)$

$\mathbb{C}^4 // \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}[a, b, c, d] / \langle ab = cd \rangle$ variété affine singulière.

...

^{lisse}

② G groupe réductif

$\text{Bun}_G^{ss}(C)$ champ des G -fibres sur une courbe projective lisse C

^{0-symplectique}

③ $\text{Higgs}_G^{ss}(C)$ champ des G -fibres de Higgs sur la courbe projective C

④ Champ de faisceaux cohérents sur $C \times \mathbb{B}^1$ ^{(-1)-symplectique}

Localement: le cas lisse ressemble à la situation ① par des théorèmes de tranches étales. (Luna, Alper-Hall-Rydh)

2. Champs algébriques: quelques éléments, hypothèses.

- X champ algébrique / \mathbb{C} , champ d'Artin: il existe $\tilde{X} \rightarrow X$ lisse où X est un schéma.
- champ des points gradués:

$$\text{Grad}(X) := \text{Maps}(\mathbb{B}G_m, X) \left[\begin{array}{l} \cong \bigcup V^d / G^d \\ X = V/G \quad d: G_m \rightarrow T \end{array} \right]$$

- champ des points filtrés $\text{Filt}(X) := \text{Maps}(\mathbb{A}^1 / G_m, X)$.

$$\left[\begin{array}{l} \cong \bigcup V^{d \geq 0} / G^{d \geq 0} \\ X = V/G \quad d: G_m \rightarrow T \end{array} \right]$$

- Pour $x \in X$ un \mathbb{C} -point fermé, $G_x \curvearrowright T_{X,x}$ [espace vectoriel]

X "symétrique en x " si $T_{X,x}$ est une G_x -représentation auto-duale.

"presque symétrique en x " si $T_{X,x}$ est une G_x^0 -rep auto-duale.

On suppose que: ① X a une diagonale affine et un bon espace de modules $p: X \rightarrow X$

② X a ses composantes connexes quasi-compactes et ses points gradués compacts

③ X est presque symétrique en tout point fermé $x \in X$.

Réseau des composantes "component lattices"

① Quotient de représentation

$$X = V/G$$

$T \subset G$ tore maximal

$W := N_G(T)/T$ groupe de Weyl

$V \cong \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} V_\alpha$ décomposition en espaces de poids

α induit une forme linéaire sur $\mathfrak{g}_\alpha := X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$\{\alpha = 0\}$ pour $\alpha \in X^*(T)$, $V_\alpha \neq 0$ induit un arrangement d'hyperplans W -invariant dans \mathfrak{g}_α .

② X champ algébrique.

Il existe une version globale de cet arrangement d'hyperplans.
→ réseau des composantes (Bu-Thomas-Mumford-Halperin-Devine-King)
+ arrangement cotangent

préfaïceau sur la catégorie des réseaux (groupes abéliens libres de type fini)

$$CL(X) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \underbrace{\pi_0}_{\substack{\text{composantes} \\ \text{connexes}}} \left(\underbrace{\text{Map}(B\mathbb{G}_m^n, X)}_{\text{points } \mathbb{Z}^n\text{-gradés de } X} \right)$$

$$CL_{\mathbb{Q}}(X) = CL(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad \text{rationalisation}$$

catégorie des faces: $\text{Face}(\mathcal{X})$

objets: (F, α)
 \mathbb{Q} -ev $F \rightarrow \text{CL}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X})$
morphisms $(F', \alpha') \xrightarrow{f} (F, \alpha)$

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{\alpha'} & \text{CL}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}) \\ f \downarrow & & \nearrow \alpha \\ F & & \end{array}$$

$(F, \alpha) \in \text{Face}(\mathcal{X}) \rightsquigarrow$ champ \mathcal{X}_{α}

$\alpha_{\mathbb{Z}} \in \text{CL}(\mathcal{X})(\mathbb{Z}^{\dim F}) \rightsquigarrow$ $\alpha_{\mathbb{Z}}$ détermine une
relèvement de α composante connexe de
 $\text{Map}(\mathbb{B}\mathbb{G}_m^{\dim F}, \mathcal{X})$

\mathcal{X}_{α} est la composante connexe correspondante.

$\text{Aut}(\alpha)$ agit sur \mathcal{X}_{α} (Halpern-Lestrang)

\mathcal{X}_{α} a un bon espace de modules \Rightarrow \mathcal{X}_{α} a un bon espace de modules.

Une face $F \rightarrow \text{CL}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X})$ est dite non-dégénérée si elle ne se factorise pas par une face de dimension strictement inférieure

Exemple: $X = V/G$
 $CL_{\mathbb{Q}}(X) \cong X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} / W$

Functoriel; $CL_{\mathbb{Q}}(X)(F) = \{ F \rightarrow X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \} / W$

faces: $\alpha \in CL_{\mathbb{Q}}(X)(F) : \alpha: F \rightarrow X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

à action de W près.

* poids de V et α donnent un arrangement hyperplan dans $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$
 \Rightarrow arrangement hyperplan dans F par tirés en arrière.
 \rightsquigarrow chambres $\sigma \subset F$.

Pour X général et $\alpha: F \rightarrow CL_{\mathbb{Q}}(X)$ une face,
il existe un "arrangement cotangent" sur F , défini en termes des poids du complexe cotangent

Hypothèse (4): pour chaque face non-dégénérée (F, α) , il existe un paramètre global équivariant sur X_{α} :

X_{α} est une composante connexe de $\text{Maps}(B\mathbb{G}_m^n, X)$
et donc possède une action de $B\mathbb{G}_m^n$ (précomposition)

Soit $x \in X$ point fermé. On a un morphisme

$$B\mathbb{G}_m^n \rightarrow X$$

d'action sur x .

Par restriction, $H^*(X) \xrightarrow{\text{res}} H^*(B\mathbb{G}_m^n)$
 $\cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$

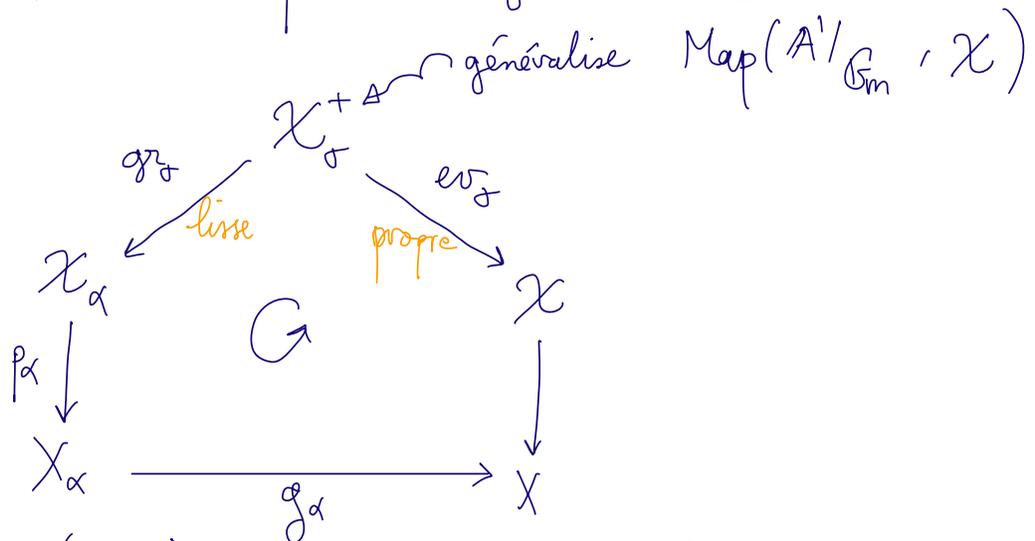
paramètre global équivariant: fibrés en droites

L_1, \dots, L_n sur X_α tels que $\text{res } c_1(L_i), 1 \leq i \leq n,$
 forment une base de $H^2(B \mathbb{G}_m^n)$. (pour tout choix de $x \in X$)

3- Induction de Hall cohomologique

(F, α) face

$\sigma \subset F$ chambre pour l'arrangement cotangent.



On obtient (en jouant avec les 6 foncteurs) un morphisme

$$*_\sigma^{\text{Hall}} : (g_\alpha)_* (p_\alpha)_* \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}} \rightarrow p_* \mathcal{Q}_X^{\text{vir}} [0]$$

pour X
presque symétrique

"induction de Hall cohomologique relative"

sections globales $\rightsquigarrow *_\sigma^{\text{Hall}} : H^*(X_\alpha)_{\text{vir}} \rightarrow H^*(X)_{\text{vir}}$.

"vir" est un décalage cohomologique.

Morphisme d'intégralité cohomologique

Théorème (Kinjo) $(F, \alpha) \in \text{Face}^{\text{nd}}(X)$.

(BDINKP) $p_\alpha * \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}_c}^{\geq \dim \alpha}(X_\alpha)$

est un complexe semisimple [approximation de p_α par des morphismes propres]
 i.e. $(p_\alpha, \mathcal{Q}_{X_\alpha})$ vérifient la conclusion du lemme de décomposition de BBDG.

On définit $\text{BPJ}_X^\alpha := \mathcal{P}H^{\dim \alpha}(p_\alpha * \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}})$ [morceau fervers de plus petit degré étant possiblement non nul]

[BDINKP] : $\text{BPJ}_X^\alpha = \mathcal{J}\mathcal{E}(X_\alpha)^\circ$
 $= \begin{cases} \mathcal{J}\mathcal{E}(X_\alpha) & \text{si } X_\alpha/BT_\alpha \rightarrow X_\alpha \\ & \text{est génériquement qf} \\ & \text{et non} \\ & 0 \end{cases}$

On a par adjonction $\left[\text{BPJ}_X^\alpha[-\dim \alpha] \rightarrow p_\alpha * \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}} \right]$
 $\mathcal{P} \leq \dim \alpha$
 $\text{SII } p_\alpha * \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}}$

Le paramètre équivariant induit un morphisme d'algèbres

$H^*(BT_\alpha) \rightarrow H^*(X_\alpha)$; mais aussi une action de $H^*(BT_\alpha)$ sur

$\mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}} \left[\begin{array}{l} X_\alpha \xrightarrow{f} X_\alpha \times BT_\alpha \\ (id, \mathcal{L}) \\ \uparrow \text{induit par} \\ \text{fibres en droites} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} f^*(\mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}} \otimes \mathcal{Q}_{BT_\alpha}) \cong \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}} \\ \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}} \otimes \mathcal{Q}_{BT_\alpha} \rightarrow f_* \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}} \text{ puis} \\ (pr_1)_* \text{ pour } pr_2 : X_\alpha \times BT_\alpha \rightarrow X_\alpha. \end{array} \right]$

et on obtient $\text{BPJ}_X^\alpha[-\dim \alpha] \otimes H^*(BT_\alpha) \rightarrow (p_\alpha)_* \mathcal{Q}_{X_\alpha}^{\text{vir}}$

\curvearrowright
 Aut(α) - équivariance

Morphisme d'intégralité :

$$\bigoplus_{(F, \alpha) \in \text{Face}^{\text{nd}}(X)} \left((g_\alpha)_* \mathbb{B}\mathbb{P}_X^\alpha \otimes H^*(BT_\alpha) \right)^{\text{Aut}(\alpha)} \rightarrow p_* \mathbb{Q}_X^{\text{vir}}$$

↑
induit par
l'induction cohomologique

faces non-dégénérées à iso près

6- Théorème de décomposition BPO

Théorème (H-Kinjo) Soit X un champ algébrique lisse satisfaisant les hypothèses ①-④. Alors il existe un isomorphisme

$$p_* \mathbb{Q}_X^{\text{vir}} \cong \bigoplus_{\alpha \in \text{Face}^{\text{nd}}(X)} \left((g_\alpha)_* \mathbb{B}\mathbb{P}_X^\alpha \otimes H^*(BT_\alpha) \right)^{\text{Aut}(\alpha)} \otimes \text{sgn}_\alpha$$

où $\mathbb{B}\mathbb{P}_X^\alpha = \begin{cases} \mathcal{J}\mathcal{E}(X_\alpha) & \text{si la composante neutre du stabilisateur d'un point fermé général de } X_\alpha \text{ est } T_\alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\text{sgn}_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \dim \alpha \\ \dim \alpha & \text{sinon} \end{cases}$

et $\text{sgn}_\alpha : \text{Aut}(\alpha) \rightarrow \{\pm 1\}$ est le **signe cotangent** $\sigma \subset \alpha$ chambre. $\text{sgn}_\alpha(\omega) = (-1)^{n_\omega}$ où n_ω est le nombre de murs entre σ et $\omega \cdot \sigma$.

X champ des représentations d'un carquois : [Meinhardt-Reineke 2014]

X champ **orthogonal** : [BDINKP 2025].

calculs explicites possibles pour $G = G_m$.

5- Borne cohomologique

Proposition ["Artin vanishing"]

Soit $X = V \times_{\text{Gal}} / G$ avec $V \cong V^*$ autoduale.

On suppose que G agit fidèlement sur X et V ne contient pas la représentation triviale de G .

$$\text{Alors } \text{coker} \left(\bigoplus_{\substack{(F, \alpha) \in \text{Face}^{\text{nd}}(X) \\ F \neq 0}} H^*(X_\alpha)_{\text{vir}} \longrightarrow H^*(X) \right)$$

est en degrés cohomologiques négatifs.

Remarque: Le thm d'intégralité prédit que ce coker est \cong à $H(\underbrace{V \times_{\text{Gal}} / G}_{\text{variété affine}})$. Artin vanishing pour H d'une variété affine est en accord avec la proposition: $H^i(X) = 0$ sauf si $-\dim X \leq i \leq 0$.

2 possibilités

Démonstration: ① formule combinatoire pour l'induction de Hall.
② géométrique

6- Branches étales:

Pour démontrer le théorème pour tous les champs lisses vérifiant ①-④, il suffit de considérer $X = V/G$ pour tout V et tout G

4- Cycles évanescents

Pour démontrer le théorème dans le cas V/G , il suffit de traiter le cas $V \times \mathfrak{g}_{\text{ad}} / G$ où \mathfrak{g}_{ad} est la représentation adjointe de G .

En effet, BDIKIP démontre que si $W \curvearrowright G$ est une rep autoduale de G , le théorème d'intégralité pour W/G implique celui pour $\underbrace{\text{crit}(f)}_{\text{lieu critique}}/G$ pour

(-1)-symplectique en général, mais parfois, troncation classique lisse

$f: W \rightarrow \mathbb{C}$ n'importe quelle fonction G -invariante.

Prends $q: \mathfrak{g}_{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique G -inv. non dégénérée (induite par la forme de Killing par exemple). On

obtient $f: V \times \mathfrak{g}_{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\text{crit}(f) = V$.

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow q \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \\ & \mathfrak{g}_{\text{ad}} & \end{array}$$

Démonstration du théorème Récurrence sur $\dim G$ et $\dim V$ en prenant des tranches étales.

Initialisation:

• $\dim G = 0$: $V/G \xrightarrow{P} V//G$ quotient fini

$$p_* \mathcal{Q}_{V/G}[\dim G] \cong \mathcal{Q}_{V//G}[\dim V//G]$$

• $\dim V = 0$: $\text{pt}/G \xrightarrow{P} \text{pt}$

$$p_* \mathcal{Q}_{\text{pt}/G}[-\dim G] \cong H_T^*(\text{pt})^w[-\dim G]$$

Hérédité : injectivité : tranches étales et hypothèse de récurrence.
surjectivité : étude asymptotique de codim (morphisme d'intégralité).

7- Applications :

- Calcul effectif de $H^*(V/G)$ pour V repr. d'un groupe réductif G (inversion de Möbius)

théorème de décomposition BPS pour les champs 0-symplectiques
surjectivité de Kirwan

→ extension du théorème de décomposition BPS aux cas des champs (-1)-symplectiques puis, par réduction dimensionnelle, 0-symplectiques.

Théorème de pureté (HK) [Conjecture de Halpern-Leitner].

Soit X un champ 0-symplectique satisfaisant les hypothèses ① à ④.

On suppose que X possède une action de G_m telle que X^{G_m} est propre.

Alors la structure de Hodge mixte sur $H^{BM}(X, \mathbb{Q})$ est pure.

Exemples : $X = \text{Higgs}_G^{ss}(\mathbb{C})$ courbe projective lisse champ des fibrés de Higgs

$X =$ champ de faisceaux sur des surfaces K3
réduction hyperkählériennes de représentations symplectiques

...