Algèbres de Hall — groupes quantiques, Yangiens, algèbres quantiques affines

Principe : on construit des algèbres intéressantes à partir de

* $\mathcal{A}$ catégorie abélienne

*
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Exact}_{\mathcal{A}} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \mathcal{A}\times\mathcal{A} & & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Exact}_{\mathcal{A}}$ = catégorie des suites exactes de $\mathcal{A}$

$= \{0 \to N \to R \to M \to 0\}$

& morphismes a, b, c

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "a"] & R \arrow[r] \arrow[d, "b"] & M \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & R' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$p(0 \to N \to R \to M \to 0) = R$

$q(0 \to N \to R \to M \to 0) = (M, N)$.

catégories intéressantes : (+ motivation)

1. Ringel: $\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_Q(\mathbb{F}_q)$ — représentations d'un carquois sur un corps fini
   Kapranov: $\mathcal{A} = \mathrm{Coh}(X)$ — faisceaux cohérents sur une courbe projective lisse X définie sur $\mathbb{F}_q$

2. Schiffmann - Vasserot, ...: $\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_{\Pi_Q}(\mathbb{C})$ — représentations de l'algèbre préprojective d'un carquois Q
   Schiffmann - Vasserot, Minets, Sala, Kapranov, ...: $\mathcal{A} = \mathrm{Higgs}(X)$ — faisceaux de Higgs sur X $(\mathcal{F}, \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}\otimes\omega_X)$ faisceau de Higgs.

3. Kontsevich - Soibelman, Davison - Meinhardt, ...: $\mathcal{A} =$ Jac(Q,W)-modules — (Q,W) - carquois avec potentiel
   $\mathcal{A} = \mathrm{Coh}_c(T^*X \times \mathbb{C})$? (c : support compact) pas encore développé.

cadre de travail :
1. + fonctions constructibles ←
2. + cohomologie / K-théorie ←
3. + cohomologie critique / catégorie des singularités.

aujourd'hui : on va essayer de donner un sens à 1, ~~peut être à 2~~.

Représentations d'un carquois sur un corps $k = \mathbb{F}_q$ / $\overline{\mathbb{F}_q}$

$Q = (\underbrace{I}_{\text{sommets}}, \underbrace{\Omega}_{\text{flèches}})$ carquois

ex :
a) •
b) • → •
c) (carquois de Jordan)
d) • ⇉ • (carquois de Kronecker)

représentation de Q : V_i k-espace vectoriel $(i \in I)$
$\alpha \in \Omega$ $x_\alpha : V_i \to V_j$ application linéaire $\rightsquigarrow V \in \mathrm{ob}(\mathrm{Rep}_Q(k))$

$\dim V = (\dim V_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$

$\underset{(d_i)_{i\in I}}{d \in \mathbb{N}^I}$ fixé.

$E_d := \bigoplus_{\alpha : i \to j \in \Omega} \mathrm{Hom}(k^{d_i}, k^{d_j})$ - espace des représentations $\simeq \mathbb{A}_k^N$ $(N = N(d))$.

$G_d := \prod_{i\in I} GL_{d_i}(k) \curvearrowright E_d$

Ensemblistement, $E_d/G_d \simeq \mathrm{ob}(\mathrm{Rep}_Q(k)[d])/\text{iso}$ (dimension d)

si $k = \mathbb{F}_q$ corps fini, ensemble fini.

Propriétés de base :
* $\mathrm{Rep}_Q(k)$ est une catégorie abélienne (noyau, conoyau, ... se calculent ponctuellement)
* propriété de Krull - Schmidt : tout objet s'écrit de façon essentiellement unique comme somme directe d'objets indécomposables (M tel que $M \simeq N\oplus N' \Rightarrow (N = M$ ou $N' = M)$).

champs de modules lisses.

$\Leftarrow$ [* dimension homologique 1 :
si Q n'a pas de cycles, tout objet M a une résolution projective (explicite) (RP)

$$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

de façon équivalente, $\mathrm{Ext}^i(M,N) = 0 \quad \forall i>1, \quad \forall M,N \in ob(Rep_Q(k))$.

<u>exemples</u> : [$Q = \bullet$ $\qquad Rep_Q(k) = k\text{-vect}$ esp vect. de dim finie sur k.

$Q = \bullet \to \bullet$ $\qquad V_1 \xrightarrow{x} V_2$ repr. de Q, $x \in Mat_{d_2 \times d_1}(k)$. À conjugaison

$V_1 \cong k^{d_1}$, $V_2 \cong k^{d_2}$ par $Gl_{d_1} \times Gl_{d_2}$ près, $x = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ (d_2 lignes, d_1 colonnes)

$\Rightarrow$ objets indécomposables de $Rep_Q(k)$
$(1,0) \quad k \to 0$
$(0,1) \quad 0 \to k$
$(1,1) \quad k \xrightarrow{1} k$.
il y en a 3.

[$Q = \bullet\circlearrowleft$ $\qquad V \xrightarrow{x} V$ avec action de $GL(V) \ni g$:

$$g\cdot x = g x g^{-1}$$

$\Rightarrow$ étudier les représentations de $\bullet\circlearrowleft$, c'est étudier les endomorphismes à conjugaison près $\rightsquigarrow$ théorie de Jordan.
$\to$ une infinité d'indécomposables.

<u>Résultat inaugural</u> : forme d'Euler $\qquad \mathcal{A} = Rep_Q(k)$

$$\langle -,- \rangle : K_0(\mathcal{A}) \otimes K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\bar{M} \otimes \bar{N} \longmapsto \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(M,N) = \dim \mathrm{Hom}(M,N) - \dim \mathrm{Ext}^1(M,N)$$

[bilinéaire mais pas forcément symétrique]

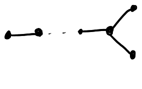
Fait : $\langle -,- \rangle$ se factorise à travers $\dim : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{N}^I$.

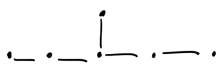
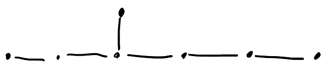
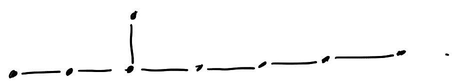
Pour $d, e \in \mathbb{N}^I$, $\boxed{\langle d,e \rangle = \sum_{i\in I} d_i e_i - \sum_{\alpha : i \to j \in Q} d_i e_j}$.

<u>Théorème (Gabriel)</u> Q a un nombre fini de représentations indécomposables si et seulement si $q(d) = \langle d,d \rangle$ est définie positive.
Q est de <u>type Dynkin ADE</u> si et seulement si $q(d) = \langle d,d\rangle$ ... il y a au plus une représentation
Dans ce cas, en chaque dimension $d \in \mathbb{N}^I$, il y a au plus une représentation indécomposable. Il y en a une si et seulement si d est une racine positive, c'est-à-dire $q(d) = \langle d,d \rangle = 1$.

<u>Carquois de type Dynkin ADE</u>

A_n $(n \geq 1)$ $\quad \bullet\!-\!\bullet\!-\cdots-\!\bullet$ $\quad$ (n sommets) $\quad sl_n$

D_n $(n \geq 4)$  $\quad$ (n sommets) $\quad so_{2n}$

E_6  $\qquad E_7$  $\qquad E_8$: 

<u>Théorème de Gabriel pour A_2</u> : $\bullet \to \bullet$ on a 3 rep. indécomposables en dimension $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

* forme d'Euler :

$$q(d) = \langle d,d \rangle = d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2 = (d_1 - d_2)^2 + d_1 d_2$$

matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ $\to$ définie positive.

$q(d) = 1 \Leftrightarrow d = (0,1), (1,0)$ ou $(1,1)$: ok.

Algèbre de Hall constructible

$\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_Q(\mathbb{F}_q)$ [ou $\mathcal{A} = \mathrm{Coh}(X)$ X courbe proj. lisse sur $\mathbb{F}_q$]

$X = \mathrm{ob}(\mathcal{A})/\sim$

$\tilde{X} = \mathrm{ob}(\mathcal{E}xact_{\mathcal{A}})/\sim$

correspondance :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X\times X & & X \end{tikzcd}$$

$q([0\to N\to R\to M\to 0]) = ([M],[N])$

$p([0\to N\to R\to M\to 0]) = [R]$.

$\to$ $H_Q := \mathrm{Fun}_c(X, \mathbb{C})$ fonctions à support fini $X \to \mathbb{C}$

multiplication : $f * g = p_! q^*(f \boxtimes g)$

p^* « tiré-en-arrière »

[$q_!$ "intégration le long des fibres"

Description plus explicite :

$$H_Q = \bigoplus_{[M]\in X} \mathbb{C}\cdot[M]$$

$$[M]\cdot[N] = \sum_{[R]\in X} \underbrace{|\{N'\subset R \mid N'\simeq N,\ R/N'\simeq M\}|}_{\text{ensemble fini car on travaille sur } \mathbb{F}_q}\cdot[R].$$

exemple : a) $Q = \bullet$ $\qquad H_Q = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{C}\cdot \mathbb{1}_d$ $\qquad \mathbb{1}_d$ = fonction prenant la valeur 1 sur l'unique représentation de dimension d, 0 ailleurs.

$$\mathbb{1}_d * \mathbb{1}_e = |\{N'\subset \mathbb{F}_q^{d+e} / \dim N' = e\}|\ \mathbb{1}_{d+e} = |\mathrm{Grass}(e, d+e)|\ \mathbb{1}_{d+e} = \begin{bmatrix} d+e \\ e \end{bmatrix}_q \mathbb{1}_{d+e}$$

q-binomial coefficients :

$$\begin{bmatrix} d+e \\ e \end{bmatrix}_q = \frac{[d+e]_q!}{[d]_q!\,[e]_q!}$$

$$[d]_q! = \prod_{i=1}^{d} [i]_q$$

$$[i]_q = \frac{q^i - 1}{q-1} \xrightarrow[q\to 1]{} i$$

$H_Q \simeq \mathbb{C}[x]$.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ k \arrow[r, "a"] & k \end{tikzcd}$$

$(1, 1) \Downarrow a = 0$.

b) $Q = \overset{1}{\bullet}\to\overset{2}{\bullet}$ $\qquad S_1 = \mathbb{F}_q \to 0$ $\qquad I = \mathbb{F}_q \xrightarrow{1} \mathbb{F}_q$

$S_2 = 0 \to \mathbb{F}_q$

$[S_2]*[S_1] = [S_1\oplus S_2]$

$[S_1]*[S_2] = [S_1\oplus S_2] + [I]$ $\qquad \Rightarrow H_Q$ est non commutative.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[d] \\ k \arrow[r, "a"] & k \end{tikzcd}$$

Pour des raisons de symétrie, on considère plutôt la multiplication tordue

$$[M]\circledast[N] = \nu^{\langle \dim M, \dim N\rangle}\,[M]*[N]. \qquad \text{où } \nu^2 = q.$$

$[S_2]\circledast[S_1] = [S_1\oplus S_2]$

$[S_1]\circledast[S_2] = \nu^{-1}([S_1\oplus S_2] + [I])$.

Structure de l'algèbre de Hall constructible (d'un carquois)

Sous-algèbre sphérique : $Q = (I, \Omega)$ carquois (sans boucles, pour simplifier)

S_i représentation simple ($\dim V_i = 1$, $\dim V_j = 0$ $j \neq i$)

$H^{sph}_{Q,\mathbb{F}_q}$ = sous-algèbre de $H_{Q,\mathbb{F}_q}$ engendrée par $[S_i]$, $i \in I$.

Théorème (Ringel) (90's) : $H^{sph}_{Q,\mathbb{F}_q} \simeq U_{\sqrt{q}}(\mathfrak{n}_+)$ où $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ est la décomposition triangulaire de l'algèbre de Kac-Moody associée à Q.

$$[S_i] \longleftarrow E_i \in U_{\sqrt{q}}(\mathfrak{n}_+)$$

(générateurs de Chevalley)

$U_\nu(\mathfrak{n}_+)$ est une $\mathbb{C}(\nu)$-algèbre (ν indéterminée)

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ matrice de Cartan de Q $\qquad a_{ij} = 2\delta_{ij} - |\{i - j\}|$.

$\underbrace{U_\nu(\mathfrak{n}_+)}_{\text{partie positive du groupe quantique}}$ est engendrée par E_i, $i \in I$, avec les relations de Serre quantique

$$\sum_{k+l = 1 - a_{ij}} \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_\nu E_i^k E_j E_i^l . \qquad i,j \in I$$

coefficient binomial quantique "symétrique"

Fait : $H^{sph}_{Q,\mathbb{F}_q} = \widehat{H_{Q,\mathbb{F}_q}}$ si et seulement si Q est Dynkin ADE.

→ Que se passe-t-il dans les autres cas ?

Réponse : algèbre de Borcherds (= algèbres de Kac-Moody généralisées)

Catégorification de l'algèbre de Hall constructible (Lusztig)

Dictionnaire Faisceaux-Fonctions

premier : $\ell \nmid q$

X variété algébrique sur $\mathbb{F}_q$.

$D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ "catégorie dérivée constructible de X"

$$\underbrace{\left(\varprojlim_n D^b(\underbrace{Sh_c(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})}_{\text{faisceaux constructibles}})\right)}_{= D_c^b(X, \mathbb{Z}_\ell)} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

Sur $\mathbb{C}$: $X/\mathbb{C}$ variété algébrique

$Sh_c(X, \mathbb{C})$ - faisceaux constructibles de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$\mathcal{F}$: $\exists$ $X = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} X_s$ stratification algébrique

telle que $\mathcal{F}|_{X_s} = i_s^* \mathcal{F}$ soit un faisceau constant sur X_s.

$D_c^b(X, \mathbb{C}) = D^b(Sh_c(X, \mathbb{C}))$

Formalisme des six foncteurs :

$f : X \to Y$ morphisme entre $\mathbb{F}_q$-variétés

$Rf_!, Rf_* : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

$f^*, Rf^! : D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

opérations internes : $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$, $R\mathcal{H}om$ sur $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

+ dualité de Verdier $\mathbb{D} : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{op} \to D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

satisfont tout un tas de relations

Faisceaux pervers :

Il existe une t-structure sur $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dont le coeur est noté $Perv(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ "$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers sur X".

meilleures propriétés que $Sh_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$!

[catégorie abélienne, artinienne, noethérienne

objets simples : "complexes d'intersection" $IC(Z, \mathcal{L})$

$Z \subset X$ sous-variété localement fermée irréductible, lisse, $\mathcal{L}$ système local simple sur Z

groupes de Grothendieck : $K(Perv(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \simeq K(D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \simeq K(Sh_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$

$= K(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

Frobenius :

Fr Frobenius géométrique relatif à $\mathbb{F}_q$.

$\mathcal{F} \in Sh_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

$x \in |X|$ (point fermé)

$\bar{x} : \mathrm{Spec}\, \overline{\mathbb{F}}_q \to X$ "point géométrique au-dessus de x"

$\mathcal{F}_{\bar{x}}$ fibre au-dessus de $\bar{x}$, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-ev.

Corps résiduel : $k(x) \simeq \mathbb{F}_{q^{\deg(x)}}$; $Fr^{\deg(x)}$ fixe x et donc agit sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$.

$\Rightarrow \mathrm{Trace}(Fr^{\deg(x)}, \mathcal{F}_{\bar{x}}) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Fonctions sur les $\mathbb{F}_q$-points :

$Fun(\underbrace{X(\mathbb{F}_q)}_{\text{ensemble fini}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ = fonctions $X(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

$f : X \to Y$ morphisme de variétés algébriques sur $\mathbb{F}_q$

$f_! : Fun(X(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to Fun(Y(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

$f^* : Fun(Y(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to Fun(X(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

$t \in Fun(X(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

$u \in Fun(Y(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

$$\begin{cases} (f_! t)(y) = \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\mathbb{F}_q) \\ f(x) = y}} t(x) & \text{"intégration le long des fibres"} \\ (f^* u)(x) = u(f(x)). \end{cases}$$

fonction trace de Frobenius :

$$t : K(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(X(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$
$$[\mathcal{F}] \longmapsto \left[t_{\mathcal{F}} : x \longmapsto \mathrm{Trace}(\mathrm{Fr}, \mathcal{F}_x) \right]$$

implicite : $t_{\mathcal{F}}$ ne dépend que de $[\mathcal{F}] \in K(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Propriétés : $\ast$ $t_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}} = t_{\mathcal{F}} t_{\mathcal{G}}$

$\ast$ $t_{f^*\mathcal{F}} = f^* t_{\mathcal{F}}$

$\ast$ $t_{Rf_!\mathcal{F}} = f_! t_{\mathcal{F}}$ [formule des traces de Grothendieck].

Remarque : Rf_* et $Rf^!$ ne se traduisent pas en opérations sur les fonctions.

Le théorème de décomposition (version affaiblie)

Théorème : (Beilinson - Bernstein - Deligne - Gabber) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre entre variétés algébriques, avec X lisse. Alors $Rf_* \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ est un complexe semi-simple dans $D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

$\hookrightarrow$ on peut écrire

$$Rf_* \overline{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \underbrace{{}^p\mathcal{H}^i(Rf_* \overline{\mathbb{Q}_\ell})}_{\text{faisceau pervers simple}}[-i]$$

Remarque : tout s'adapte pour des champs d'Artin.

Pour les carquois, champs algébriques quotient E_d / G_d, $d \in \mathbb{N}^I$ [on peut travailler avec des faisceaux G_d-équivariants sur E_d]

E_d / G_d

Construction de Lusztig : $Q = (I, \Omega)$ carquois

E_d = espace de représentations de Q, $d \in \mathbb{N}^I$.

$\underline{d} = (d_1, \dots, d_s) \in (\mathbb{N}^I)^s$ $\quad \sum_{i=1}^{s} d_i = d$.

$\mathcal{F}_{\underline{d}}$ = variété de drapeaux I-gradués

$$= \left\{ (0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_s = \overline{\mathbb{F}_q}^{d}) \;\middle|\; \dim \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1} = d_i \quad 1 \leq i \leq s \right\}$$

$$\overline{\mathbb{F}_q}^{d} = \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathbb{F}_q}^{d_i}$$

variété d'incidence : $\widetilde{\mathcal{F}}_{\underline{d}} = \left\{ (x, \mathcal{F}_\bullet) \in E_d \times \mathcal{F}_{\underline{d}} \;\middle|\; x\, \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_i \quad 1 \leq i \leq s \right\}$

$\widetilde{\mathcal{F}}_{\underline{d}}$ lisse

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathcal{F}}_{\underline{d}} \arrow[dl, "a"', "\text{fibré vectoriel}"] \arrow[dr, "\pi_{\underline{d}}", "\text{propre}"'] & \\ \mathcal{F}_{\underline{d}} & & E_d \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (x, \mathcal{F}_\bullet) \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ \mathcal{F}_\bullet & & x \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}_\bullet \in \mathcal{F}_{\underline{d}}$ $\qquad$ $E_d \ni x$

Thm de décomposition : $(\pi_{\underline{d}})_* \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ = complexe semi-simple sur E_d

$\mathcal{Q}_d$ = sous-catégorie pleine des complexes semi-simples dans $D^b_c(E_d, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ dont les facteurs simples apparaissent dans les $(\pi_{\underline{d}})_* \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ ($\underline{d}$ peut varier)

$\mathcal{Q} := \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^I} \mathcal{Q}_d$ catégorifie l'algèbre de Hall sphérique $H^{sph}_{Q,\mathbb{F}_q}$

la partie positive du groupe quantique $U_\nu(\mathfrak{n}_+)$.

la trace de Frobenius fournit un isomorphisme

$$K(\mathcal{Q}) := \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^I} K(\mathcal{Q}_d) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^{sph}_{Q,\mathbb{F}_q}.$$

$\rightarrow$ il faut définir la version géométrique de la multiplication

<u>Foncteurs d'induction et de restriction</u> : On fixe $V = \mathbb{F}_q^d$ $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel I-gradué de dimension d

$\mathbb{F}_q^{d''} = W \subset V$ s.e.v I-gradué de dimension d'' ; $d'+d''=d$

on choisit une identification $V/W \simeq \mathbb{F}_q^{d'}$.

$G_d \circlearrowright E_d$ - espace de représentations

$P_{d',d''} \circlearrowright F_{d',d''} = \{x \in E_d \mid xW \subset W\}$

sous-groupe parabolique

$$P_{d,d'} = \{g \in G_d \mid gW \subset W\}.$$

$$\begin{tikzcd} x \in F_{d',d''} \arrow[r, "\text{immersion fermée}"] \arrow[d, "\text{fibré vectoriel trivial}"'] & E_d \\ (x_{|V/W}, x_{|W}) \in E_{d'} \times E_{d''} & \end{tikzcd}$$

En termes de champs quotient :

$$\begin{tikzcd} & F_{d',d''}/P_{d',d''} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ E_{d'}/G_{d'} \times E_{d''}/G_{d''} & & E_d/G_d \end{tikzcd}$$

champ des suites exactes $0 \to N \to R \to M \to 0$
$\begin{cases} \dim N = d'' \\ \dim M = d' \end{cases}$

* p est propre
* q est lisse de dimension relative $-\langle d', d'' \rangle$.

<u>Foncteur d'induction</u> :

$$\mathrm{Ind}_{d',d''} : D^b_c(E_{d'}/G_{d'}) \times D^b(E_{d''}/G_{d''}) \longrightarrow D^b(E_d/G_d)$$
$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longmapsto p_! q^*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})[-\langle d',d''\rangle]$$

<u>Foncteur de restriction</u> :

$$\mathrm{Res}_{d,d'} : D^b_c(E_d/G_d) \longrightarrow D^b_c(E_{d'}/G_{d'} \times E_{d''}/G_{d''})$$
$$\mathcal{F} \longmapsto q_! p^* \mathcal{F}[-\langle d',d''\rangle]$$

<u>Remarque</u> : $\mathrm{Res}_{d',d''}$ donne la comultiplication (qu'on n'a pas définie sur $H_{Q,\mathbb{F}_q}$, mais elle existe).

Thm (Lusztig) $\mathcal{Q} \subset \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^I} D^b_c(E_d/G_d, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est préservée par les foncteurs d'induction et restriction.

$(K(\mathcal{Q}), \mathrm{Ind}, \mathrm{Res}) \simeq H^{sph}_{Q,\mathbb{F}_q}$

<u>Remarque</u> : Ce n'est qu'une petite partie de ce qu'on peut faire

* produit scalaire sur $U_\nu(\mathfrak{n}_+)$ $\longrightarrow$ catégorifié par $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim \left(\mathrm{Hom}_{D^b(E_d/G_d)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}[i]) \right) \nu^{-i}$, ...
pour $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in D^b_c(E_d/G_d)$
* carquois de type fini, carquois affines : on a une description explicite des faisceaux pervers simples de la catégorie $\mathcal{Q}$.
* les faisceaux pervers simples de $\mathcal{Q}$ fournissent la base canonique du groupe quantique $U_\nu(\mathfrak{n}_+)$, définie de façon purement combinatoire par Kashiwara.

* on peut réaliser la construction avec les faisceaux pervers en travaillant sur $\mathbb{C}$. On peut alors faire une étude microlocale.

Morphisme de groupes abéliens

$X/\mathbb{C}$ variété complexe. $K(D^b_c(X,\mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{Z}[\text{cycles Lagrangiens, coniques dans } T^*X]$

$\mathcal{F} \longmapsto CC(\mathcal{F})$

cycle caractéristique de $\mathcal{F}$.

carquois : $d \in \mathbb{N}^I$, $X = E_d$, $T^*X = T^*E_d = E_{\overline{Q},d} \supset \Lambda_d$ "variété nilpotente de Lusztig"

($\overline{Q}$: carquois dédoublé)

Λ_d est une variété Lagrangienne, conique (hautement singulière !)

Pour $\mathcal{F} \in \mathcal{Q}_d$, $CC(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}[\operatorname{Irr}\Lambda_d]$, c'est-à-dire que $CC(\mathcal{F})$ est combinaison linéaire des composantes irréductibles de Λ_d.

Question (Lusztig) Si $\mathcal{F}$ est un faisceau pervers simple sur E_d, G_d-équivariant, tel que $CC(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}[\operatorname{Irr}\Lambda_d]$, est-ce que $\mathcal{F} \in \mathcal{Q}_d$?

Réponse : oui pour les carquois de type Dynkin ADE, les carquois affines, carquois g boucles

$S_g =$  ; en général la réponse n'est pas connue.

$\mathcal{Q}_d \subset D^b(E_d/G_d, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

$\downarrow t$

$\prod_{r \geq 1} \operatorname{Fun}(E_d(\mathbb{F}_{q^r}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

$H_{Q,\mathbb{F}_q}$ $\mathbb{N}^I$-graduée.

$\sum \underbrace{\dim_{\mathbb{C}} H_{Q,\mathbb{F}_q}[d]}_{\in \mathbb{N}[q]} z^d$

Kac $M_{Q,d}(q)$

$I_{Q,d}(q)$

$\underbrace{A_{Q,d}(q)}_{\in \mathbb{N}[q]} =$ repr. abs. ind de Q de dim d sur $\mathbb{F}_q$

$d \in \mathbb{Z}^I$-graduée.

$Q \rightsquigarrow \mathfrak{g}_Q$ $\dim \mathfrak{g}_Q[d] = A_{Q,d}(0)$

Q "sauvage" 

X $\mathbb{C}$ g.

$CC : K_0(\text{faisceaux d'Eisenstein sph}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[\operatorname{Irr}(\mathcal{N})]$ ②

$g=0$

$g=1$

$g \geq 2$ surjectif.

injectivité : bientôt.

$\mathbb{C}[\operatorname{Irr}\mathcal{N}] \simeq U(\mathfrak{g}_g)$.

$\mathfrak{g}_g$ est $\mathbb{Z}^+ = \{(r,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid r \geq 1, \; r=0, d \geq 0\}$-graduée.

Coefficients binomiaux quantiques symétriques

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_\nu = \frac{[n]_\nu^!}{[k]_\nu^! [n-k]_\nu^!}$$

$$[k]_\nu^! = \prod_{j=1}^{k} [j]_\nu$$

$$[j]_\nu = \frac{\nu^j - \nu^{-j}}{\nu - \nu^{-1}}$$