Corrigé CC 1 sans trop de détails

ex 1.1

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$Q \Leftrightarrow R$	$(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$	$P \Leftrightarrow R$	$((P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow R)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Ce n'est pas une tautologie.

ex 1.2 : • si $n = 6$, $2^n = 2^6 = 64$ et $6n + 7 = 43$ donc on a bien

$$2^n \geq 6n + 7.$$

• $[n \to n+1]$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\geq 2 \cdot (6n+7) \quad \text{par H.R} \\ &= 12n + 14 \\ &= [6(n+1) + 7] + [\underbrace{6n + 1}_{\geq 0}] \\ &\geq 6(n+1) + 7 \end{aligned}$$

ex 1.3 : 1- $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1 = f(x)$.

2- $f(1) = 1^5 - 1 = 0$ et comme f est injective, $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Maintenant, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, alors en multipliant par $x - 1$ et par 1-, $f(x) = 0$ donc $x = 1$.

3- Si $x = 1$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 5 \neq 0$: absurde.

ex1.4. $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty\right)$

et $f(x_n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$

donc f n'est pas majorée.

Soit $x'_n = 2\pi n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = +\infty$ mais $f(x'_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

ex1.5. 1. $1_{A^c} = 1_X - 1_A$

2. si $A \subset B$, soit $x \in X$.

si $x \in A$, alors $x \in B$ donc $1_A(x) = 1 \leqslant 1_B(x) = 1$.

sinon, $x \notin A$ et $1_A(x) = 0 \leqslant 1_B(x) = 0$ ou 1.

Réciproquement, si pour tout $x \in X$, $1_A(x) \leqslant 1_B(x)$, comme $1_B(x) = 0$ ou 1 pour tout $x \in X$, si $1_A(x) = 1$ alors $1_B(x) = 1$. Donc $x \in A \Rightarrow x \in B$, soit $A \subset B$.

3- $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leqslant 1_B$

$\Leftrightarrow -1_A \geqslant -1_B$

$\Leftrightarrow 1 - 1_A \geqslant 1 - 1_B$

$\Leftrightarrow 1_{A^c} \geqslant 1_{B^c}$

$\Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

ex 1.6. 1. $(A^c)^c = A$.

2. D'après 1., $f \circ f = id_{\mathcal{P}(X)}$ donc f est une bijection et son inverse est f elle-même (on dit que f est une involution).

ex 1.7 1- si $\mathrm{card}(X)=0$, alors $X=\emptyset$. Dans ce cas,

$X\subset Y_1\cup Y_2$ est toujours vrai, tout comme $X\subset Y_1$, et $X\subset Y_2$

donc ($X\subset Y_1$ ou $X\subset Y_2$) est aussi vrai. Par conséquent, $P(X,Y_1,Y_2)$ est vrai.

2- si $\mathrm{card}(X)=1$, on écrit $X=\{x\}$. Dans ce cas,

$$X\subset \{Y_1\cup Y_2 \iff x\in Y_1\cup Y_2$$

$$\iff x\in Y_1 \text{ ou } x\in Y_2$$

$$\iff \{x\}=X\subset Y_1 \text{ ou } \{x\}\subset Y_2 .$$

en particulier, $P(X,Y_1,Y_2)$ est vrai.

3- Non. Contre-exemple : $Y_1=\mathbb{R}_-$, $Y_2=\mathbb{R}_+$, $X=\{-1,1\}$.

On a $X\subset Y_1\cup Y_2=\mathbb{R}$ Mais on n'a pas $X\subset Y_1$ ni $X\subset Y_2$. Ainsi $P(X,Y_1,Y_2)$ est faux

ex 1.8 1- Soit $(x,y)\in(X\times Y)\setminus(A\times B)$. Si $x\in A$, alors $y\notin B$ donc

$(x,y)\in X\times(Y\setminus B)$.

Sinon, $x\notin A$ et $(x,y)\in(X\setminus A)\times Y$. Donc l'inclusion $\subset$ est vrai.

Pour $\supset$, soit $(x,y)\in(X\times(Y\setminus B))\cup((X\setminus A)\times Y)$.

si $(x,y)\in X\times(Y\setminus B)$, alors $(x,y)\in(X\times Y)\setminus(A\times B)$.

De même, si $(x,y)\in(X\setminus A)\times Y$, $(x,y)\in(X\times Y)\setminus(A\times B)$.

D'où l'inclusion $\supset$.

2- $\boxed{\subset}$. Soit $(x,y)\in(X\times(Y\setminus B))\cap((X\setminus A)\times Y)$.

$$(x,y)\in X\times(Y\setminus B)\Rightarrow y\notin B$$

et $(x,y)\in(X\setminus A)\times Y\Rightarrow x\notin A$.

Donc $(x,y)\in(X\setminus A)\times(Y\setminus B)$.

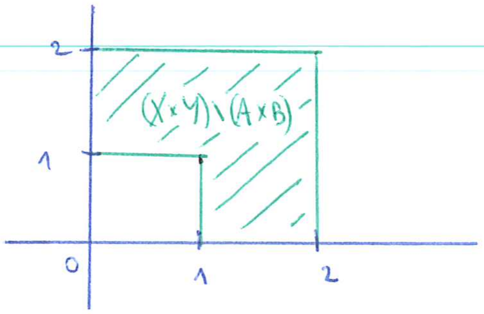
$\boxed{\supset}$ Soit $(x,y)\in(X\setminus A)\times(Y\setminus B)$.

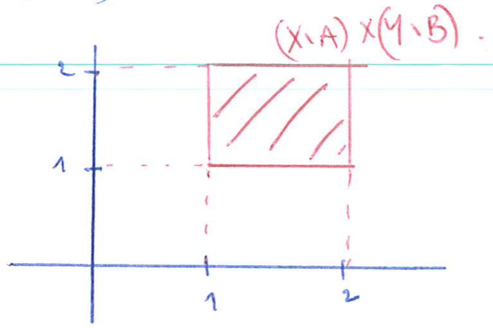
Alors comme $(X\setminus A)\times(Y\setminus B)\subset X\times(Y\setminus B)$

et $(X\setminus A)\times(Y\setminus B)\subset(X\setminus A)\times Y$,

on a bien $x\in\big(X\times(Y\setminus B)\big)\cap\big((X\setminus A)\times Y\big)$.

3.





ex 1.9.1 Soit $x\in X$.

$$\begin{aligned}
x\in f^{-1}(B_1\cup B_2) &\Leftrightarrow f(x)\in B_1\cup B_2\\
&\Leftrightarrow f(x)\in B_1 \text{ ou } f(x)\in B_2\\
&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x\in f^{-1}(B_2)\\
&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2).
\end{aligned}$$

2. Soit $x\in X$.

$$\begin{aligned}
x\in f^{-1}(B_1\cap B_2) &\Leftrightarrow f(x)\in B_1\cap B_2\\
&\Leftrightarrow f(x)\in B_1 \text{ et } f(x)\in B_2\\
&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1) \text{ et } x\in f^{-1}(B_2)\\
&\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2).
\end{aligned}$$

3. Soit $y\in Y$,

$$y\in f(A_1\cup A_2)\Leftrightarrow \exists x\in A_1\cup A_2,\ f(x)=y.$$

Donc si $y\in f(A_1\cup A_2)$, soit $x\in A_1\cup A_2$ tel que $f(x)=y$.

si $x\in A_1$, $y\in f(A_1)$

si $x\in A_2$, $y\in f(A_2)$.

Donc $f(A_1\cup A_2)\subset f(A_1)\cup f(A_2)$.

Pour $\boxed{\supset}$, comme $A_1, A_2\subset A_1\cup A_2$, $f(A_1), f(A_2)\subset f(A_1\cup A_2)$ et donc $f(A_1)\cup f(A_2)\subset f(A_1\cup A_2)$.

3- • $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$

et $f(\{0\}) = 0$

• $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+ = f(\mathbb{R}_+)$ donc $f(\mathbb{R}_-) \cap f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Donc

$$f(\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+) \nsubseteq f(\mathbb{R}_-) \cap f(\mathbb{R}_+).$$

ex 1.10 - 1 - Soit $Y \in P_2$. Alors si Y a un élément, il existe $x \in X$ tel que $Y = \{x\}$ et dans ce cas, $Y = f((x,x))$. Sinon, Y a deux éléments et alors il existe $x, y \in X$ tels que $Y = \{x, y\}$. Dans ce cas, $Y = f((x,y))$.

2 - Si $Y = \{x\}$, $f^{-1}(\{Y\}) = \{(x,x)\}$ est de cardinal 1

si $Y = \{x, y\}$ avec $x \neq y$, $f^{-1}(\{Y\}) = \{(x,y), (y,x)\}$ est de cardinal 2.