Feuille 3 - Relations sur un ensemble

On montre que $\sim$ est une relation d'équivalence :

ex 3.1 : 1. réflexivité : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \sim (x,y)$ car $xy = xy$.

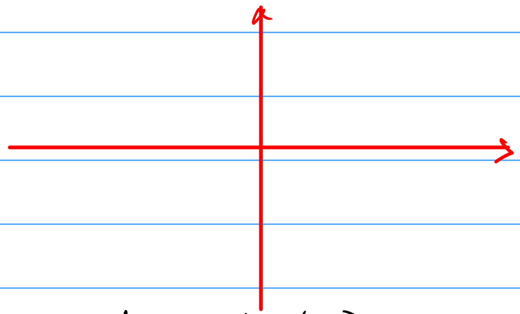
symétrie : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $xy = x'y'$. Alors on a aussi $x'y' = xy$ (de façon évidente) donc $(x',y') \sim (x,y)$.

transitivité : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y) \sim (x',y')$ et $(x',y') \sim (x'',y'')$. Alors $xy = x'y'$ et $x'y' = x''y''$.
Donc $xy = x''y''$ et $(x,y) \sim (x',y')$, d'où la transitivité.

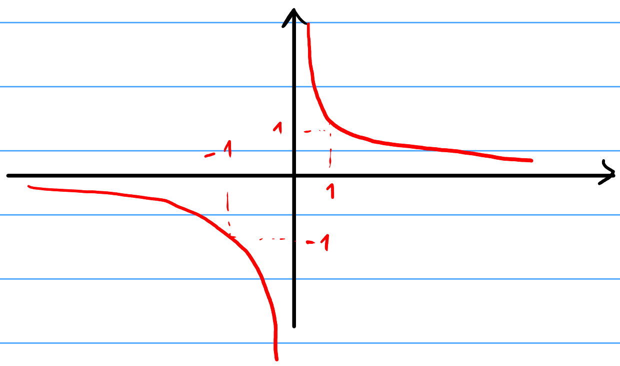
on aurait pu appliquer la Prop. 37 du cours à $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$

Donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

2. La classe d'équivalence de $(0,0)$ est
$\overline{(0,0)}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ = union des axes de coordonnées



La classe d'équivalence de $(1,1)$ est
$\overline{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. C'est une hyperbole :



La classe d'équivalence de $(1,-1)$ est l'ensemble
$\overline{(1,-1)}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -1\}$:

1
-1
1
-1

ex 3.2 : 1. On montre que $\sim$ est une relation d'équivalence :

réflexivité. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|x| = |x|$ donc $x \sim x$.

symétrie. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. si $x \sim y$, alors $|x| = |y|$, donc $|y| = |x|$ et $y \sim x$.

transitivité : Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors $|x| = |y|$ et $|y| = |z|$. Donc $|x| = |z|$ et $x \sim z$. Donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

On aurait pu appliquer la prop 3.7 du cours à $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

2. Si $x = 0$, la classe d'équivalence de x est $\bar{x} = \{0\}$. Son cardinal est 1
Si $x \neq 0$, la classe d'équivalence de x est $\bar{x} = \{x, -x\}$ et $x \neq -x$ donc son cardinal est 2.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$.
$x \mapsto \bar{x}$

Surjectivité de $f|_{\mathbb{R}_+}$: Soit $C \in \mathbb{R}/\sim$ Alors soit $C = \{0\} = f|_{\mathbb{R}_+}(0)$.

Sinon, $C \neq 0$ et il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $C = \bar{x} = \{x, -x\}$.
Si $x > 0$, $C = f(x)$ et $x \in \mathbb{R}_+$
si $x < 0$, $C = f(-x)$ et $(-x) \in \mathbb{R}_+$.
Donc $f|_{\mathbb{R}_+}$ est bien surjective.

Injectivité de $f|_{\mathbb{R}_+}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $\bar{x} = \bar{y}$. Si $x = 0$, alors $\bar{x} = \{0\} = \bar{y} = \{y, -y\}$ donc $y = 0$.
Si $x \neq 0$, alors $\bar{x} = \{x, -x\}$ a 2 éléments. Donc $\{y, -y\} = \bar{y}$ a aussi 2 éléments. Par 2., $y \neq 0$. Comme $y \geq 0$, $y > 0$.
Comme $x > 0$, $y > 0$ et $\{x, -x\} = \{y, -y\}$, nécessairement $x = y$.

D'où l'injectivité de f.

Application réciproque de $f_{/\mathbb{R}_+}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\sim &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \{x,-x\} &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ex 3.3 : 1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \sim y \iff x^2 - y^2 = x - y$$
$$\iff x^2 - x = y^2 - y.$$

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - x$ répond donc à la question.

2. C'est la proposition 37 du cours.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y^2 - y = x^2 - x \}$

$$= f^{-1}(\{x^2 - x\})$$

$$= \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 + 4(x^2 - x)}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4(x^2 - x)}}{2} \right\}$$

en résolvant le trinôme du second degré

$y^2 - y - (x^2 - x) = 0$ (l'inconnue est y).

Remarque : ce calcul est inutilement compliqué : le trinôme $y^2 - y - (x^2 - x) = 0$ d'inconnue y a pour solution évidente x et la somme des racines vaut 1 (opposé du coefficient devant y) donc l'autre racine est $1 - x$.

donc $f^{-1}(\{x^2 - x\}) = \{x, 1 - x\}$.

Du coup on a l'égalité (peut-être surprenante mais néanmoins vraie)

$$\{x, 1 - x\} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 + 4(x^2 - x)}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4(x^2 - x)}}{2} \right\}$$

<u>ex 3.4 :</u> 1. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv y\ [2]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k$.

Alors $(-1)^y = (-1)^{x+2k}$

$$= (-1)^x \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1} = (-1)^x.$$

2. D'après la prop 3.15 du cours, il existe une application

$$f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \{-1, 1\}$$
$$\bar{x} \longmapsto (-1)^x .$$

3. On a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $f(\bar{0}) = 1$ et $f(\bar{1}) = -1$.

ex 3.5 : 1 Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv y\ [6]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$

tel que $y = x + 6k$.

$\quad = x + 3 \cdot (2k)$

Donc $x \equiv y\ [3]$.

2. Par la Prop 3.15 du cours, il existe

$$f : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad \text{telle que } p_3 = f \circ p_6.$$

On représente cela sous forme du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, "p_6"'] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\
\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

3. On a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

et
$f(\bar{0}) = \bar{0}$
$f(\bar{1}) = \bar{1}$
$f(\bar{2}) = \bar{2}$
$f(\bar{3}) = \bar{0}$
$f(\bar{4}) = \bar{1}$
$f(\bar{5}) = \bar{2}$

donc f est surjective.

4. On a $\bar{0} \neq \bar{3}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ mais $f(\bar{0}) = f(\bar{3}) = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Donc f n'est pas injective.

Soit $x, y, z \in X$.

__ex 3.6__ : 1- reflexivité : $x R x$ car $\exists i \in I$ tel que $x \in A_i$ par la 2ème propriété satisfaite par les partitions.

symétrie : si $x R y$, alors $\exists\, i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $y \in A_i$.
et donc on a $y R x$.

transitivité : On suppose $x R y$ et $y R z$. Alors $\exists i \in I$, $x, y \in A_i$
et $\exists j \in I$ tel que $y, z \in A_j$
Si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ donc comme $y \in A_i \cap A_j$, on a $i = j$
et donc $x, z \in A_i$.
Donc $x R z$.

Donc R est bien une relation d'équivalence.

2- On a $X/_R \subset \mathcal{P}(X)$ et $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$.
Il s'agit de montrer que $X/_R = \{A_i : i \in I\}$.
On montre $\boxed{\subset}$.
Soit $x \in X$. $\exists i \in I$ tel que $x \in A_i$. On montre que $\overline{x} = A_i$.
Soit $y \in \overline{x}$. Alors $x R y$ donc $\exists j \in I$, $x, y \in A_j$. Comme $x \in A_i \cap A_j$, $i = j$ (sinon, $A_i \cap A_j = \emptyset$). Donc $y \in A_i$. Ainsi, $\overline{x} \subset A_i$.
Inversement, si $y \in A_i$, $x, y \in A_i$ donc $x R y$, donc $A_i \subset \overline{x}$.
D'où $A_i = \overline{x}$.

On montre $\boxed{\supset}$. Soit $i \in I$. $A_i \neq \emptyset$ donc il existe $x \in A_i$.
Le même raisonnement que ci-dessus montre que $\overline{x} = A_i$.
Donc $\{A_i : i \in I\} \subset X/_R$

D'où $X/_R = \{A_i : i \in I\}$.