TD8 :

$X = \{1, \dots, p\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$

card $\underbrace{\mathrm{Surj}(X,Y)}_{\text{ens des surjections } X \to Y}$.

- card $\mathrm{Surj}(X,Y) = 0$ $\quad n > p$
- cas difficile : $n \leq p$.

si $n = p$ $\quad \mathrm{Surj}(X,Y) = \mathrm{Inj}(X,Y) = \mathrm{Bij}(X,Y) = n!$
(ex. 2.13)

cas vraiment difficile : $n < p$.

$A_i = \{ f : X \to Y \mid i \notin f(X) \}$ pour $i \in Y$.

On remarque que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\text{fonctions } X \to Y \text{ non surjectives}\}$

$A \subset F(X,Y) = \{\text{ens des fonctions } X \to Y\}$

$\mathrm{Surj}(X,Y) = F(X,Y) \setminus A$

donc card $\mathrm{Surj}(X,Y) = \underbrace{\text{card } F(X,Y)}_{= n^p} - \text{card } A$.

et $\text{card}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = j}} \text{card}\Big(\underbrace{\bigcap_{i \in I} A_i}_{}\Big)$ $\quad$ (*)

$= \{ f : X \to Y \mid I \cap f(X) = \emptyset \}$

$= \{ f : X \to Y \setminus I \}$

donc $\text{card}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \text{card}\big(F(X, Y \setminus I)\big)$

$= \text{card}(Y \setminus I)^{\text{card } X}$

$= (n - |I|)^p$.

(*) donne $\quad \operatorname{card}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \underbrace{\sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = j}} \overbrace{(n-j)^p}}$ $\quad$ (notation : $|I| = \operatorname{card}(I)$)

$$\underbrace{\sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = j}}} = \#\{I \subset \{1,\dots,n\} \mid \operatorname{card}(I) = j\} = \binom{n}{j} \leftarrow \text{exo } 2.14.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j-1} (n-j)^p.$$

donc $\operatorname{card} \operatorname{Surj}(X,Y) = \operatorname{card} \underbrace{\overbrace{F(X,Y)}^{n^p}} - \operatorname{card}(A)$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^p.$$

<u>Rappel</u> : $I(X,Y) = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))$
$= \dfrac{n!}{(n-p)!}$. $\quad$ ex 2.13

<u>ex 2.14</u> : calculer $\operatorname{card} \overbrace{\{Y' \subset Y \mid \operatorname{card} Y' = p\}}^{Z} = \binom{n}{p}$
$\operatorname{card} Y = n$

1- $\quad G : I(X,Y) \longrightarrow Z$
$\quad\quad f \longmapsto f(X).$

G est bien définie : il s'agit de montrer que $\operatorname{card}(f(X)) = p$.
Or, comme f est injective, $\operatorname{card} f(X) = \operatorname{card} X = p$.

<u>G est surjective</u> : Soit $Y' \in Z$. On écrit $Y' = \{y_1, \dots, y_p\}$ où $y_i \in Y$ pour $1 \leq i \leq p$, et les y_i sont $\underbrace{\text{2 à 2 distincts}}_{y_i \neq y_j \text{ pour } i \neq j}$.

On définit $f : X \longrightarrow Y$
$\quad\quad\quad\quad\quad i \longmapsto y_i$.

Par définition de f, $f(X) = \{y_1, \dots, y_p\} = Y'$, et f est injective car les y_i sont 2 à 2 distincts. Donc $f \in I(X, Y)$, et $G(f) = Y'$. Donc G est surjective

2- Soit $Y' \in \overline{Z}$.

$$G^{-1}(\{Y'\}) = \{ f : X \to Y \,|\, f \text{ injective et } f(X) = Y' \}$$

$$= \{ \underline{f : X \to Y'} \,|\, f \text{ } \underline{\text{injective}} \text{ } \underbrace{\text{et } f(X) = Y'}_{\text{inutile car}} \}$$

inutile car
$f(X) \subset Y'$,
card $f(X) = \text{card } X = p$
et card $Y' = p$.

une inclusion +
égalité des cardinaux
$\Rightarrow$ ensembles égaux !
$f(X) = Y'$.

$$= \{ f : X \to Y' \,|\, f \text{ injective} \}.$$

$$= I(X, Y').$$

donc $\text{card } G^{-1}(\underline{\{Y'\}}) = \text{card } I(X, Y') = \dfrac{\overbrace{\text{card}(Y')!}^{p!}}{\underbrace{(\text{card } \cancel{Y' - \text{card}} X)!}_{0! = 1}}$

ex 2.13
(question 4)

$= p!$

3- corollaire 2.47. $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{card } I(X, Y)}_{\frac{n!}{(n-p)!}} = p! \cdot \text{card } Z$.

on obtient $\text{card } Z = \dfrac{n!}{(n-p)!\, p!} = \dbinom{n}{p}$.

exercice 2.15 : On veut montrer que $2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

$Z_p = \{ Y' \in \mathcal{P}(Y) \mid \text{card } Y' = p \}$

$Y = \{1, \dots, n\}$

$\text{card } Z_p = \binom{n}{p}$ (exo 2.14.)

exo 2.10, question 3 : $\text{card } \mathcal{P}(Y) = 2^n$ (car $n = \text{card } Y$)

On a $\mathcal{P}(Y) = \bigcup_{p=0}^{n} Z_p$, union disjointe :

$Z_p \cap Z_q = \{ Y' \in \mathcal{P}(Y) \mid \text{card } Y' = p = q \}$
$= \emptyset$ si $p \neq q$.

donc $\underset{\underset{2^n}{\shortparallel}}{\text{card } \mathcal{P}(Y)} \overset{\text{cor } 2.45}{=} \sum_{p=0}^{n} \underbrace{\text{card } Z_p}_{\binom{n}{p}}$

donc $2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

Feuille 3 :

Relations d'équivalence.

X ensemble

xRy, $x\sim y$, $x\equiv y$, ...

- réflexive : $x\sim x$ pour tout $x\in X$
- symétrique : $x\sim y \Rightarrow y\sim x$ pour tout $(x,y)\in X^2$
- transitive : $(x\sim y$ et $y\sim z)\Rightarrow (x\sim z)$ pour tout $(x,y,z)\in X^3$.

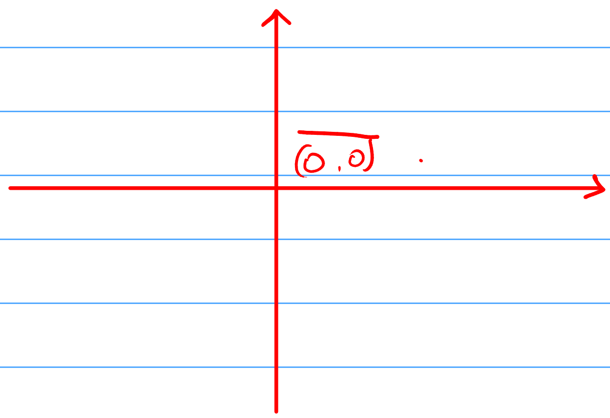
ex 3.1 1- On peut appliquer la prop 3.7 du cours à l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto xy$$

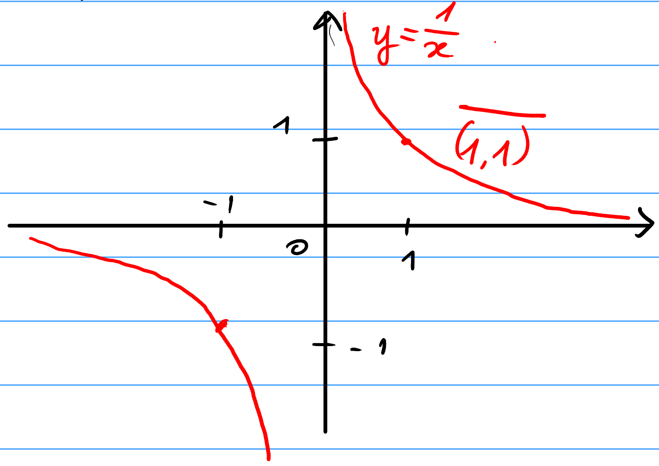
Par déf, $(x,y)\sim(x',y') \Leftrightarrow f((x,y)) = f((x',y'))$ donc on a bien une relation d'équivalence.

2- $(0,0)\in\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ produit cartésien.

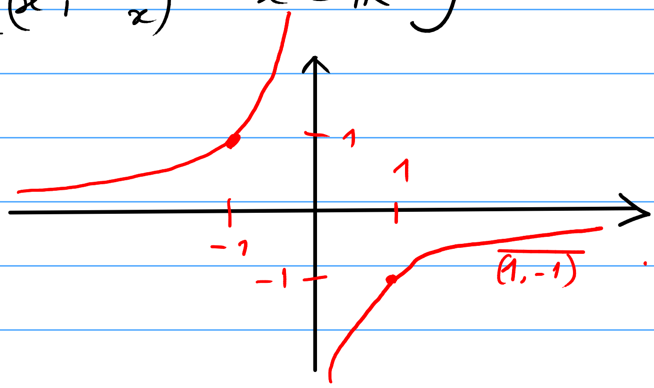
$$\overline{(0,0)} = C_{(0,0)} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy = 0.0 = 0\}$$
$$= \{(0,y) : y\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}.$$



$$\overline{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\cdot 1 = 1\}$$
$$= \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$$
$=$ graphe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, c'est une hyperbole.



$$\overline{(1,-1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -1\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} x\neq 0 \text{ et} \\ y = -\frac{1}{x}\end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\left(x, -\frac{1}{x}\right) : x \in \mathbb{R}^*\right\}$$



<u>ex 3.2</u> : 1- $x \sim y \iff |x| = |y|$

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$$ (f n'est pas bijective)

Alors $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ par définition. Donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence. par la prop 3.7.

2- On a $\overline{x} = \boxed{f^{-1}}(\{x\})$

$= \{x, -x\}$ car $|x| = |y| \iff \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y \end{cases}$

On a $\operatorname{card} \overline{x} = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq -x. \\ 1 & \text{si } x = -x \end{cases}$

$= \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{aligned} x = -x &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned} \right)$

3- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}/\sim}$ notation pour désigner l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$

$\mathbb{R}/\sim = \{\overline{x} : x \in \mathbb{R}\}$

$= \{\{x, -x\} : x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}/\sim \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

ou encore $\mathbb{R}/\sim \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

On veut montrer que la restriction $f|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}/\sim$ est une bijection.

On définit $g : \mathbb{R}/\sim \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \overline{x} &\longmapsto |x| \\ \shortparallel & \\ \{x, -x\} & \end{aligned}$$

g est bien définie : si $\overline{x} = \overline{y}$, alors $g(x) = g(y)$

c-à-d : $|x| = |y|$.

C'est bien le cas par déf. de la relation $\sim$

Il faut vérifier que $g \circ f|_{\mathbb{R}_+} = id_{\mathbb{R}_+}$ (*)

et $f|_{\mathbb{R}_+} \circ g = id_{\mathbb{R}/\sim}$. (**)

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ $f|_{\mathbb{R}_+}(x) = \bar{x} = \{x, -x\}$

et $g(f|_{\mathbb{R}_+}(x)) = |x| = x$ . .

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}/\sim$. On a $g(\bar{x}) = |x|$.

et

$$f|_{\mathbb{R}_+}(g(\bar{x})) = f|_{\mathbb{R}_+}(|x|)$$
$$= \overline{|x|} = \{|x|, -|x|\}$$
$$= \{x, -x\}$$

Donc f est une bijection d'inverse g.

<u>ex 3.3</u> : sur $\mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y. \quad (*)$$

1- On pose : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - x$

Il est clair que $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

2- Par la prop 3.7 du cours, $\sim$ est une rel. d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

3 Soit $x \in \mathbb{R}$. $\bar{x} = \{ y \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x^2 - x = y^2 - y}_{\text{équation d'inconnue } y} \}$.

On résout $y^2 - y \underbrace{- (x^2 - x)} = 0 \quad (*)$

$$\left[(y-a)(y-b) = y^2 - (a+b)\,y + ab \right]$$

$$\begin{cases} x \text{ est solution de } (*) \\ -(x^2 - x) = \underset{= x(1-x)}{x - x^2} \text{ est le produit des solutions de } (*). \end{cases}$$

Donc $(*)$ a pour solutions x et $(1-x)$.

3. $\overline{x} = \{x, 1-x\}$

$$\operatorname{card} \overline{x} = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 1-x \iff x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autre app. de la formule du crible

$X = \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{card} X = n$

$\operatorname{card} \operatorname{Bij}(X,X) = n!$ (ex 2.13).

$F \subset \operatorname{Bij}(X,X)$

où $F = \{f \in \operatorname{Bij}(X,X) \mid f(i) \neq i \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Calculer $\operatorname{card}(F)$.