Exercice 2.12 : 1- $\text{card}(A\cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A\cap B)$.

2- $$\text{card}(A\cup(B\cup C)) = \text{card}(A) + \underbrace{\text{card}(B\cup C)} - \underbrace{\text{card}(A\cap(B\cup C))} \quad (*)$$

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ (lois de Morgan)

* par 1. $\text{card}(B\cup C) = \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B\cap C)$

* par 1. $\text{card}((A\cap B)\cup(A\cap C)) = \text{card}(A\cap B) + \text{card}(A\cap C) - \text{card}(\underbrace{A\cap B\cap A\cap C}_{= A\cap B\cap C})$

En remplaçant dans (*), on trouve la formule recherchée.

$$\boxed{\begin{aligned}\text{card}(A\cup B\cup C) = \text{card}(A) &+ \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B\cap C) \\ &- \text{card}(A\cap B) - \text{card}(A\cap C) + \text{card}(A\cap B\cap C).\end{aligned}}$$

3- On peut conjecturer la formule :

$$\boxed{\text{card}(\underbrace{A_1\cup\dots\cup A_n}_{=\bigcup_{i=1}^{n} A_i}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ |I|=j}} \text{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)}.$$

Démonstration : 1ère démonstration : récurrence sur n

$n=1$: évident

[$n=2$: formule de 1.]

[$n=3$: formule trouvée en 2.]

[$n\to n+1$]. On écrit $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cup A_{n+1}$. On obtient donc :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \text{card}(A_{n+1}) - \text{card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cap A_{n+1}\right) \text{ par 1.}$$

appliqué à $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $B = A_{n+1}$

Maintenant on utilise la formule pour $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ donnée par l'hypothèse de récurrence : $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = j}} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = j}} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) + \operatorname{card}(A_{n+1})$$

$$- \operatorname{card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)$$

$$\| $$

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$$

par HR appliquée à $A_i \cap A_{n+1}$, $1 \leq i \leq n$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = j}} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i \cap A_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n+1\} \\ |I| = j}} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

en remarquant que $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\}) = \{I \subset \{1,\dots,n+1\} \mid n+1 \notin I\} \cup \{I \subset \{1,\dots,n+1\} \mid n+1 \in I\}$

$$= \{I : I \subset \{1,\dots,n\}\} \cup \{I \cup \{n+1\} : I \subset \{1,\dots,n\}\}$$

et cette union est disjointe.

d'où l'hérédité.

On a montré la formule voulue par récurrence.

$2^{\text{ème}}$ démonstration : Avec les fonctions indicatrices

On suppose que $A_1, \dots, A_n \subset X$ pour un certain ensemble. On peut toujours faire ça en prenant $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Notons $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. On a $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$.

L'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A est $\mathbb{1}_A = 1 - \mathbb{1}_{A^c}$.

On a $\mathbb{1}_{A^c} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i^c} = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$.

Donc $\mathbb{1}_A = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$ $\qquad \mathbb{1}_{A_I}$ où $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$

$$\underset{\text{en développant}}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| = n}} \overbrace{\prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}}^{\mathbb{1}_{A_I}}$$

et on remarque que pour $B \subset X$, $\operatorname{card}(B) = \sum_{x \in X} \mathbb{1}_B(x)$.

Donc
$$\operatorname{card}(A) = \sum_{x \in X} \mathbb{1}_A(x) = \sum_{x \in X} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| = n}} \mathbb{1}_{A_I}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I| = n}} \underbrace{\sum_{x \in X} \mathbb{1}_{A_I}(x)}_{= \operatorname{card}(A_I)}$$

et la formule est démontrée.

Exercice 2.13 : 1- Si $n < p$, il ne peut pas y avoir d'injection de X dans Y (sinon, on aurait $card(X) = p \leq card(Y) = n$).

2- Si $p = 0$, $X = \emptyset$. On sait qu'il existe une unique application $X \xrightarrow{f} Y$ dans ce cas. Il suffit de voir qu'elle est injective. Or, f est injective ssi :

$$\underbrace{\forall x \in X, \forall x' \in X,}_{\text{condition vide}} \; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'). \quad (*)$$

car $X = \emptyset$, donc $(*)$ est vrai et f est injective.

3- a. Si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$. En effet, si tel n'était pas le cas, une fonction $f \in A_i \cap A_j$ vérifierait $f(x_0) = y_i$ et $f(x_0) = y_j$. Or $y_i \neq y_j$.

En outre, $I(X,Y) = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

L'inclusion $\supset$ est évidente par définition des A_i.

Pour $\subset$, soit $f \in I(X,Y)$. Alors $\exists i \in \{1,\dots,n\}$, $f(x_0) = y_i$. On a $f \in A_i$.

b- Soit $1 \leq i \leq n$. L'application

$$F_i : A_i \longrightarrow I(X', Y \setminus \{y_i\})$$
$$f \longmapsto f|_{X'}$$

est bien définie car si $f \in A_i$, on a $f(x_0) = y_i$ et par injectivité de f, $f(x) \neq y_0$ pour tout $x \in X$, $x \neq x_0$.

On définit $G_i : I(X', Y \setminus \{y_i\}) \longrightarrow A_i$

$$g \longmapsto \left(f : x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in X' \\ y_i & \text{si } x = x_0 \end{cases} \right).$$

Il est facile de vérifier que $F_i \circ G_i = id_{I(X', Y \setminus \{y_i\})}$ et $G_i \circ F_i = id_{A_i}$.

Donc F_i est bijective d'inverse G_i.

c. On montre par récurrence sur $p = \mathrm{card}(X)$ que pour tout ensemble Y, $\mathrm{card}(Y) = n$, $\mathrm{card}\, I(X,Y) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

- Si $p = 0$, c'est 2.
- $[p \to p+1]$. Soit X un ensemble à $p+1$ éléments, $p \geq 0$.

Par 3.a., $\mathrm{card}\, I(X,Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{card}(A_i)$

$$\underset{\text{par } b}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{card}\, I(\overbrace{X'}^{p \text{ éléments}}, \overbrace{Y \setminus \{y_i\}}^{n-1 \text{ élts}})}_{= \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!} \text{ par H.R.}}$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-(p+1))!}$$

et donc la propriété est démontrée au rang $p+1$, ce qui conclut la récurrence.

4- Comme X est un ensemble fini, les applications injectives $X \to X$ sont exactement les applications bijectives $X \to X$. Donc par 3., il y a $I(X,X) = n!$ permutations de X.