TD 6 - Vendredi 9 octobre 2020

Exercice 2.10 : 1. Soit $x \in X$.

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 0.$$

Or, $x \in A^c \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A^c}(x) = 1$.

Donc $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 0$.

De la même façon, $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1$. Or, $x \notin A^c \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A^c}(x) = 0$, donc $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1$.

On peut donc écrire :

$$\forall x \in X, \quad \mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x).$$

- $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$

$$\Leftrightarrow (\mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(x) = 1)$$

donc $\forall x \in X, \quad \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x)$.

- $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$

$$\Leftrightarrow (\mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ ou } \mathbb{1}_B(x) = 1)$$

donc $\forall x \in X, \quad \mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x))$

ou bien $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cup B}(x)$

2. Soit

$$J : F \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$f \longmapsto \{x \in X \mid f(x) = 1\}.$$

à vérifier

On a $J \circ I = id_{\mathcal{P}(X)}$ et $I \circ J = id_F$ donc I est une bijection d'inverse $I^{-1} = J$.

3. Par 2., on a $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = \operatorname{card} F$.

et $\operatorname{card} F = \left(\operatorname{card} \{0,1\}\right)^{\operatorname{card} X}$

$= 2^n$.

Exercice 2.11 : 1. Si X est fini, notons $n = \mathrm{card}(X) \in \mathbb{N}$.

On a $\mathrm{card}\,\mathcal{P}(X) = 2^n$ (exo 2.10)

Si il existe une surjection $X \to \mathcal{P}(X)$, alors on a

$$2^n = \mathrm{card}\,\mathcal{P}(X) \leq \mathrm{card}(X) = n.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < 2^n$. On peut le montrer par récurrence sur n :

- $n = 0$. On a bien $0 < 2^0 = 1$.
- $n = 1$: $1 < 2^1 = 2$
- si on a $n < 2^n$ (*) pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$n+1 \underbrace{\leq}_{\text{car } n \geq 1} 2n \underbrace{<}_{\text{par } (*)} 2 \cdot 2^n, \quad \text{donc} \quad n+1 < 2^{n+1}.$$

Donc l'existence d'une surjection $X \to \mathcal{P}(X)$ entraîne une contradiction : il ne peut exister une telle surjection.

2. a. $A \in \mathcal{P}(X)$ donc par surjectivité de f, il existe $c \in X$ tel que $f(c) = A$

b. $A \subset X$.

si $c \in A$, alors par définition de A, $c \notin f(c) = A$: absurde

si $c \notin A$, alors comme $f(c) = A$, $c \notin f(c)$ et par définition de A, $c \in A$: contradiction.

Donc un tel c ne peut pas exister : f n'est pas surjective.

3. Cela reviendrait à trouver une surjection

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ n &\longmapsto A_n \end{aligned}$$

ce qui par 2. n'est pas possible donc on ne peut pas trouver une telle suite.

Exercice 2.12 : 1- $\mathrm{card}(A\cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A\cap B)$.

2- $\mathrm{card}(A\cup(B\cup C)) = \mathrm{card}(A) + \underbrace{\mathrm{card}(B\cup C)}_{} - \underbrace{\mathrm{card}(A\cap(B\cup C))}_{}$ (*)

// (lois de Morgan)
$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

par 1. $\mathrm{card}(B\cup C) = \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(B\cap C)$

par 1. $\mathrm{card}((A\cap B)\cup(A\cap C)) = \mathrm{card}(A\cap B) + \mathrm{card}(A\cap C) - \mathrm{card}(\underbrace{A\cap B\cap A\cap C}_{=A\cap B\cap C})$

En remplaçant dans (*), on trouve la formule recherchée.

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{card}(A\cup B\cup C) = {}& \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(B\cap C)\\ & - \mathrm{card}(A\cap B) - \mathrm{card}(A\cap C) + \mathrm{card}(A\cap B\cap C)\end{aligned}}$$

3- On peut conjecturer la formule :

$$\boxed{\mathrm{card}(\underbrace{A_1\cup\dots\cup A_n}_{=\bigcup_{i=1}^{n} A_i}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \mathrm{card}(I)=k}} \mathrm{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)}$$

On peut réécrire cette somme comme suit :

Pour $0\leq k\leq n$, on définit

$$P_{k,n} = \{I\in P(\{1,\dots,n\}) \mid \mathrm{card}(I) = k\}$$ l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$ ayant k éléments. Par définition, pour $1\leq k\leq n$,

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \mathrm{card}(I)=k}} \mathrm{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \sum_{I\in P_{k,n}} \mathrm{card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$