TD5 - Vendredi 2 octobre 2020

À partir de maintenant, les corrigés seront très succincts.

exercice 2.6 :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$g\circ f$ est bien définie.

1. Si $g\circ f(x) = g\circ f(x')$ pour $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ par injectivité de g puis $x = x'$ par injectivité de f. Donc $g\circ f$ est injective.
2. Soit $z \in Z$. Par surjectivité de g, il existe $y \in Y$ tel que $g(y) = z$. Par surjectivité de f, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On a $g\circ f(x) = g(y) = z$. Donc $g\circ f$ est surjective.

3. Par 1. et 2., $g\circ f$ est à la fois injective et surjective, donc bijective.

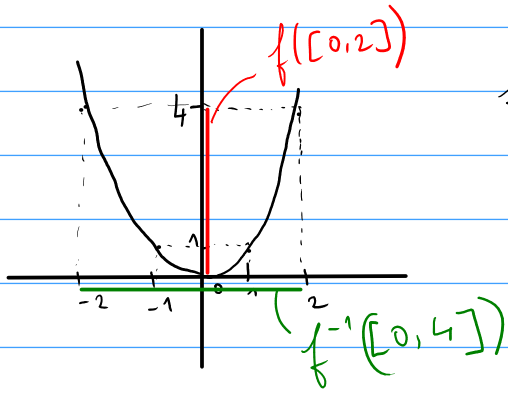
   Pour $x \in X$, $z \in Z$, $g\circ f(x) = z \iff f(x) = g^{-1}(z)$
   $\iff x = f^{-1}\circ g^{-1}(z)$

   donc $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

exercice 2.7 : 1. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
Ainsi, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Soit $x \in f^{-1}(B)$. Par définition, $f(x) \in B$. Donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$

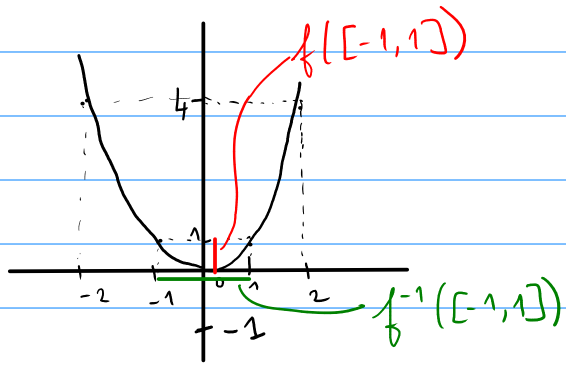
3-



$f([0,2]) = [0,4]$.

$f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$.

Donc $f^{-1}(f([0,2])) = [-2,2]$.



$f^{-1}([-1,1]) = [-1,1]$

$f([-1,1]) = [0,1]$

Donc $f(f^{-1}([-1,1])) = [0,1]$.

exercice 2.8: $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{0\}\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$$

$$= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \geqslant 0\}$$

$$= \{\alpha + 2k\pi : \alpha \in [0,\pi],\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= [0,\pi] + 2\pi\mathbb{Z}$$

exercice 1.9 : 1. Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $ax+b=y$ équivaut à
$$ax = y-b.$$
si $a \neq 0$, $x = \frac{y-b}{a}$ donc l'équation admet une solution qui de surcroît est unique. Donc $a \neq 0 \Rightarrow f$ bijective

Si $a=0$, $f(x) = b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f n'est pas surjective (ni même injective) donc f n'est a fortiori pas bijective.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = y \iff x^2+2x-y = 0.$$
C'est un trinôme du second degré.
$$\Delta = 4+4y$$
$$= 4(1+y).$$

si $\Delta > 0$, $f(x)=y$ a deux solutions. Or, $\Delta > 0 \iff y > -1$.
si $\Delta = 0$, $f(x) = y$ a une solution et $\Delta = 0 \iff y = -1$
si $\Delta < 0$, $f(x) = y$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{R}$.

En résumé, $\# f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} 2 & \text{si } y > -1 \\ 1 & \text{si } y = -1 \\ 0 & \text{si } y < -1. \end{cases}$