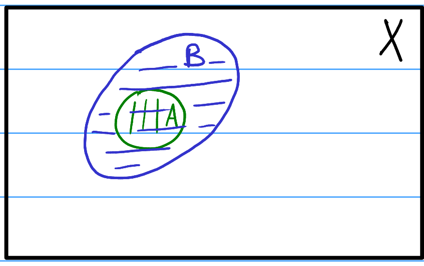
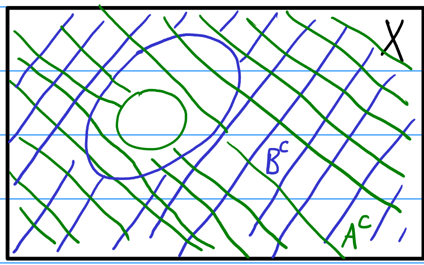
TD 4 - Lundi 28 septembre 2020

ex 2.1 :





On suppose que $A \subset B$ (*). Montrons que $B^c \subset A^c$.

Soit $x \in B^c$. Alors $x \notin B$. Par l'absurde, si $x \notin A^c$, alors $x \in A$. Par (*), $x \in B$: contradiction. Donc $x \in A^c$. On a montré $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$, soit $B^c \subset A^c$.

<u>ex 2.2</u>. Pour montrer les équivalences de l'exercice, il suffit de montrer les implications

$$(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B) \qquad (1)$$
$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cap B = A) \qquad (2)$$
$$(A \cap B = A) \Rightarrow (A \setminus B = \emptyset) \qquad (3)$$
$$(A \setminus B = \emptyset) \Rightarrow A \subset B \qquad (4)$$

en vertu du fait que pour trois énoncés P, Q, R,
$$(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

On peut les représenter plus visuellement sous la forme

$$\begin{tikzcd}
& A \subset B \arrow[dr, Rightarrow, "(1)"] & \\
A \setminus B = \emptyset \arrow[ur, Rightarrow, "(4)"] & & A \cup B = B \arrow[dl, Rightarrow, "(2)"] \\
& A \cap B = A \arrow[ul, Rightarrow, "(3)"] &
\end{tikzcd}$$

(1) Supposons $A \subset B$. Montrons que $A \cup B = B$. On procède par double inclusion.

Montrons que $A \cup B \subset B$

Soit $x \in A \cup B$. On distingue deux cas :

- soit $x \in B$
- sinon, $x \notin B$, donc $x \in A$. Comme $A \subset B$, $x \in B$.

Dans tous les cas, $x \in B$. Donc $A \cup B \subset B$.

L'autre inclusion $B \subset A \cup B$ est évidente.

Donc $A \cup B = B$.

(2) Supposons que $A \cup B = B$. On montre que $A \cap B = A$ par double inclusion.

L'inclusion $A \cap B \subset A$ est évidente

Montrons que $A \subset A \cap B$.

Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = B$ donc $x \in B$.

Ainsi, $x \in A$ et $x \in B$: $x \in A \cap B$.

Ainsi, $A \subset A \cap B$.

Finalement, $A \cap B = A$.

(3) Supposons que $A \cap B = A$. On montre que $A \setminus B = \emptyset$.

Raisonnement par l'absurde. (Supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$: $x \in A$ et $x \notin B$. Or, $A = A \cap B$ donc $x \in B$. On obtient une contradiction, donc $A \setminus B = \emptyset$

(4) Supposons que $A \setminus B = \emptyset$. Montrons que $A \subset B$.

Soit $x \in A$. Par l'absurde, si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B = \emptyset$: absurde. Donc $x \in B$ et donc $A \subset B$.

On a démontré toutes les implications donc que tous les énoncés de la question 1 sont équivalents à $A \subset B$. Si on avait démontré séparément toutes les équivalences, on aurait eu 8 implications à démontrer au lieu de 4.

ex23 : 1. On a $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

Démonstration : Par définition, $(A\cup B)^c = X\setminus(A\cup B)$.

On a $X\setminus(A\cup B) = \{x\in X \mid x \notin (A\cup B)\}$

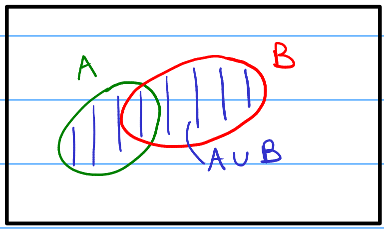
Or, $x\notin(A\cup B) \Leftrightarrow (x\notin A$ et $x\notin B)$

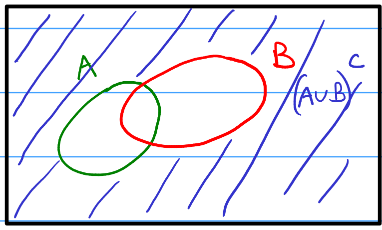
donc $(A\cup B)^c = \{x\in X \mid x\notin A$ et $x\notin B\}$

$= \{x\in X \mid x\notin A\}\cap\{x\in X \mid x\notin B\}$

$= A^c\cap B^c$

Dessin :





2. $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.

En effet, $(A\cap B)^c = X\setminus(A\cap B)$

$=\{x\in X \mid x\notin A\cap B\}$

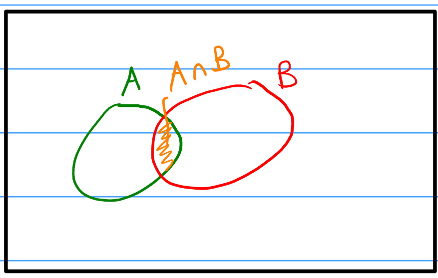
$=\{x\in X \mid$ non $(x\in A\cap B)\}$

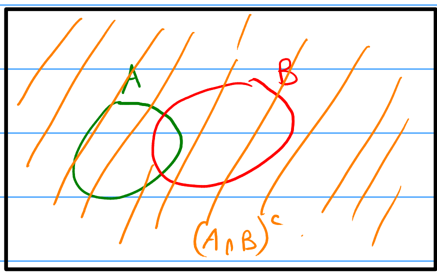
$=\{x\in X \mid$ non $(x\in A$ et $x\in B)\}$

$=\{x\in X \mid x\notin A$ ou $x\notin B\}$

$=\{x\in X \mid x\notin A\}\cup\{x\in X \mid x\notin B\}$

$= A^c\cup B^c$





3. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

Démonstration. On procède par double inclusion.

($\subset$) Montrons que $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Soit $x\in A\cap(B\cup C)$.

Alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$.

On distingue deux cas.

$\underline{1^{er}}$ cas : si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$.

$2^{ème}$ cas : si $x \notin B$, alors $x \in C$ donc $x \in A \cap C$.

Dans tous les cas, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. D'où l'inclusion

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$(\supset)$ Montrons que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. On distingue deux cas.

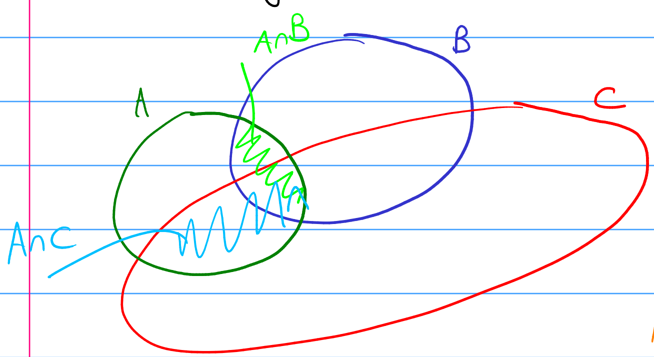
1^{er} cas. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$ donc

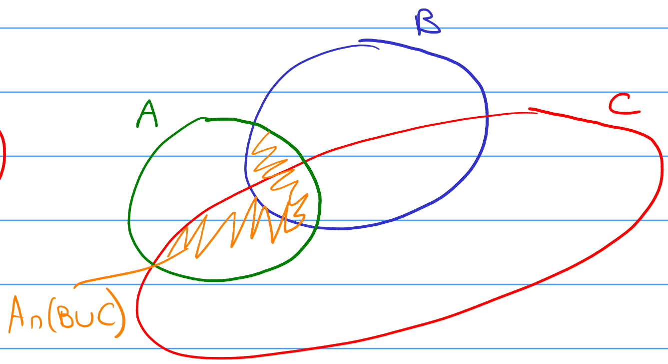
$x \in A \cap (B \cup C)$

$2^{ème}$ cas : Si $x \notin A \cap B$, alors $x \in A \cap C$. Dans ce cas,

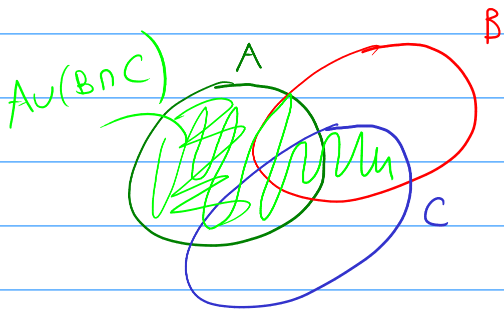
$x \in A \cap (B \cup C)$.

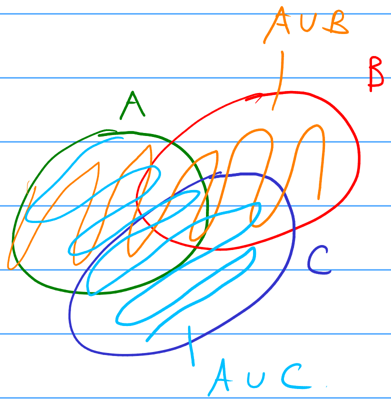
Donc finalement, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.





4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$





<u>Démonstration</u> : On procède par double inclusion. Montrons que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Soit $x \in A \cup (B \cap C)$.

On distingue deux cas.

1er cas : $x \in A$ Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$

2ème cas : $x \in B \cap C$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.

Dans tous les cas, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Donc

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Montrons que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Soit $x \in A$ et donc $x \in A \cup (B \cap C)$.

Sinon, $x \in A \cup B$ et $x \notin A$ donc $x \in B$

et $x \in A \cup C$ et $x \notin A$ donc $x \in C$

Donc $x \in B \cap C$ et $x \in A \cup (B \cap C)$.

Donc on a bien $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

D'où l'égalité voulue

<u>ex 2.4</u> : • ϕ n'a qu'un seul sous-ensemble, à savoir ϕ. Donc

$$\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}.$$

• $\{\phi\}$ a deux sous-ensembles : ϕ et $\{\phi\}$ donc

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}.$$

• $\{\phi, \{\phi\}\}$ a quatre sous-ensembles :

- ϕ
- deux sous-ensembles à 1 élément, $\{\phi\}$ et $\{\{\phi\}\}$
- un sous-ensemble à 2 éléments, $\{\phi, \{\phi\}\}$.

Donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$.

ex 2.5 : On veut montrer que
$$\underbrace{\left(\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}\right)}_{*} \Rightarrow (a=a' \text{ et } b=b').$$

Supposons donc (*). On distingue deux cas

1er cas : Si $a=b$, alors $\{\{a\},\underbrace{\{a,b\}}_{=\{a\}}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$.

(*) implique donc que $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$ est un ensemble à 1 élément, donc que $\{a'\} = \{a',b'\}$. Cela est vrai si et seulement si $a'=b'$.

Avec $a'=b'$, (*) se réécrit $\{\{a\}\} = \{\{a'\}\}$, ce qui implique $a=a'$.

En fin de compte, $a=b=a'=b'$ donc en particulier, $(a=a')$ et $(b=b')$.

2ème cas : $a \neq b$.

Alors $\{\{a\},\{a,b\}\}$ possède deux éléments. Par suite, $a' \neq b'$ sinon, $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$ aurait un seul élément et on ne pourrait avoir (*)

$\{\{a\},\{a,b\}\}$ possède un seul élément qui est un ensemble à un seul élément, à savoir $\{a\}$. De même pour $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$, il s'agit de $\{a'\}$. Donc $\{a\} = \{a'\}$, donc $\underline{a=a'}$.

En regardant les éléments de $\{\{a\},\{a,b\}\}$ et de $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$ qui sont des ensembles à 2 éléments, on trouve $\{a,b\} = \{a',b'\}$.

Donc $(a=a' \text{ et } b=b')$ ou $(a=b' \text{ et } b=a')$. La deuxième possibilité est exclue car si $a=b'$ et $b=a'$, alors comme $a=a'$, on aurait $a=b$ ce que l'on a exclu. Donc $a=a'$ et $b=b'$.