TD 3 - Vendredi 25 septembre 2020

exercice 12 :

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{0^2 + 1^2 + \ldots + n^2}_{\sum_{k=0}^{n} k^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soit $P(n) = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$.

initialisation : $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ et $\frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0$

donc $P(0)$ est vrai.

hérédité : On suppose que $P(n)$ est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$.

On a $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

donc $P(n+1)$ est vrai.

<u>Conclusion</u> : Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vrai.

2. Soit $P(n) = (n! \leq n^n)$ pour $n \geqslant 1$.

On montre par récurrence que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant 1$.

<u>initialisation</u> : $1! = 1 \leq 1^1 = 1$ donc $P(1)$ est vrai.

<u>hérédité</u> : Supposons que $P(n)$ est vrai pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $n! \leq n^n$.

Ainsi, $(n+1)! = n!\,(n+1) \leq (n+1) \cdot n^n$. $(*)$

Comme $n \leq n+1$ et la fonction $x \longmapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}+$, $n^n \leq (n+1)^n$.

Par $(*)$, on obtient $(n+1)! \leq (n+1) \cdot (n+1)^n = (n+1)^{n+1}$.

donc $P(n+1)$ est vrai.

<u>Conclusion</u> : Par principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $n! \leq n^n$.

<u>Question supplémentaire</u> : Trouver une expression pour

$$\sum_{k=0}^{n} k^3.$$

<u>Exercice 13</u> : Cet exercice présente la récurrence forte.

1. On définit $Q(n) : (\forall m \leq n,\ P(m))$ et on montre en utilisant une récurrence (simple) que $Q(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

<u>Initialisation</u> : $Q(0) = (\forall m \leq 0, P(m))$
$= P(0)$ est vrai par hypothèse.

<u>Hérédité</u>. On suppose $Q(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$:
on a $\forall m \leq n, P(m)$. $(*)$
Par hypothèse, on a $P(n+1)$ $(**)$
donc en combinant $(*)$ et $(**)$, on a
$$\forall m \leq n+1, P(m)$$
c'est-à-dire $Q(n+1)$.

<u>Conclusion</u> : Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$.

2. On montre par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ peut être écrit comme produit de nombres premiers.

<u>initialisation</u> : $n = 2$ est premier donc 2 s'écrit bien comme produit de nombres premiers.

<u>hérédité</u>. Soit $n \geq 2$ tel que tout entier m tel que $2 \leq m \leq n$ s'écrive comme produit de nombres premiers.
On fait une disjonction de cas.
* soit $n+1$ est premier, auquel cas il s'écrit bien comme produit de nombres premiers.
* Sinon $(n+1)$ n'est pas premier. Dans ce cas, on peut écrire $n+1 = r \cdot s$ $(*)$ où $r, s \in \mathbb{Z}$, $2 \leq r \leq n$, $2 \leq s \leq n$.

Par hypothèse de récurrence forte, r et s s'écrivent comme produit de nombres premiers. En utilisant $(*)$, on déduit une écriture de $n+1$ en produit de nombres premiers.

<u>Conclusion</u> : Par récurrence forte, tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme

produit de nombres premiers.

<u>exercice 14</u> : 1. On suppose par l'absurde que $P(0)$ est faux. Alors $0 \in X$.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, on a en particulier
$\forall n \in X, n \geq 0$
et donc 0 est le plus petit élément de X. Or, on a supposé que X n'a pas de plus petit élément. Donc $0 \notin X$. Ainsi, $P(0)$ est vrai.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(m)$ pour tout $m \leq n$: $\forall m \leq n, m \notin X$
Ainsi, $X \subset [\![n+1, +\infty [\![$.
Si $n+1 \in X$, alors comme $\forall x \in X, x \geq n+1$, $n+1$ est le plus petit élément de X : absurde. Donc $n+1 \notin X$, c'-à-d $P(n+1)$ est vrai

3. Par principe de récurrence forte, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $X = \emptyset$: c'est absurde. Donc X a un plus petit élément.

<u>Exercice 15</u> : 1. D = les poules ont des dents
M = les poules sont des mammifères

1 dit : $(D \Rightarrow M \text{ et non } M) \Rightarrow (\text{non } D)$
raisonnement valide car $(D \Rightarrow M) \Leftrightarrow \big((\text{non } M) \Rightarrow (\text{non } D)\big)$

2. R = Pierre réussi le cours d'algèbre.
A = Pierre assiste au cours
B = Pierre ne bavarde pas avec sa voisine
E = il écoute le prof

2 dit : $\Big(\big(R \Leftrightarrow (A \text{ et } B \text{ et } E)\big) \text{ et } \big(E \Rightarrow (A \text{ et } B)\big)\Big) \Rightarrow (R \Leftrightarrow E)$

C'est un raisonnement valide.

3. F = Pierre vient à la fête

T = Marie est triste

J = Jean vient à la fête

3 dit : $\Big(\big(F \Rightarrow T\big) \text{ et } \big(T \Rightarrow (\text{non } J)\big) \text{ et } \big((\text{non } J) \Rightarrow (\text{non } F)\big)\Big) \Rightarrow (\text{non } F)$

Raisonnement valide : on montre par l'absurde que F est faux

Exercice 16 $P1$ = piste de droite

$P1$ = la piste 1 va à une oasis

$P1'$ = la piste 1 se perd dans le désert

$P2$ = la piste 2 va à une oasis

$P2'$ = la piste 2 se perd dans le désert

S = les sphinx disent la vérité

1. on a S ou $(\text{non } S)$

$(\text{non } P1) \Leftrightarrow P1'$

$(\text{non } P2) \Leftrightarrow P2'$

$S \Rightarrow ((P1 \text{ ou } P2) \text{ et } P1')$

$\text{non } S \Rightarrow ((\text{non } P1) \text{ et } (\text{non } P2) \text{ et } (\text{non } P1'))$

2. si non S, alors non $P1' = P1$ donc on a $P1$.

Donc $(\text{non } S) \Rightarrow (P1 \text{ et non } P1)$

et donc on obtient une contradiction.

Donc on a S. Or $S \Rightarrow (\underbrace{(P1 \text{ ou } P2) \text{ et } P1'}_{(\cancel{P1 \text{ et } P1'}) \text{ ou } (P2 \text{ et } P1')})$ (par lois de Morgan)

absurde

donc on a $P2 \rightarrow$ la piste de gauche va à l'oasis.