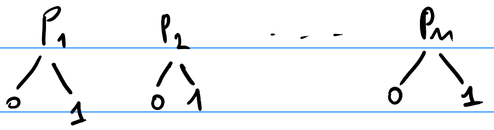
TD2 - Lundi 21 septembre 2020

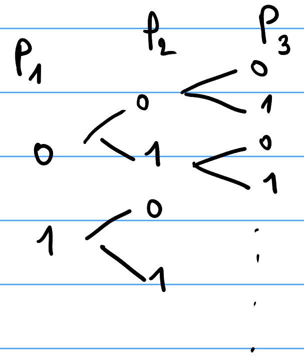
P	Q	R	S	
0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1		0 ou 1

2 choix ⤳ au total, $2 \times 2 \times 2 \times 2 + 1 = 17$.

Si on a n énoncés $P_1, \dots, P_n$, la table de vérité comporte $2^n + 1$ lignes.



⤳ 2^n lignes + la 1ère.



__exercice 6 :__

1. $1 > x$ ou $x > 3$.

On a $1 \leq x \leq 3 \iff (1 \leq x$ et $x \leq 3)$

non $(1 \leq x \leq 3) \iff$ non $(1 \leq x$ et $x \leq 3)$

$\iff (1 > x$ ou $x > 3)$

- Dans les réponses D et E, on suppose implicitement que $x \in \mathbb{R}$, donc elle est un peu moins bonne.

2. énoncé original : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \underbrace{\forall x \geq x_0}_{x \in [x_0, +\infty[}, \boxed{f(x) > A}$.

négation $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists x \geq x_0,$ $f(x) \leq A$.

↓ négation

3. énoncé original : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \boxed{\leq} M$

négation $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \boxed{>} M$.

exercice 7 :

① C. $\overline{\left(\exists x\, P(x)\right)}$ et $\left(\forall y \neq x \,,\, \text{non} P(y)\right)$

x est défini seulement ici

ne veut rien dire : x n'est pas défini.

une bonne réponse : $\overline{\exists x \left(P(x) \text{ et } \forall y \neq x, \text{non} P(y)\right)}$.

↓ négation

2. · $\forall x \left(\text{non } P(x) \text{ ou } \left(\exists y \neq x \,,\, P(y)\right)\right)$ = réponse C

· La réponse B fonctionne aussi mais ne se repose pas 1.

→ Correction disponible sur ma page web.

Tautologies : si on montre $P \Rightarrow Q$, alors on montre que $P \Rightarrow Q$ est une tautologie.

exercice 8 : 1. $P(x) = x \geq 1$, $Q(x) = x \leq 0$.

$\exists x\, P(x)$: vrai (par ex $x = 2$)

$\exists x\, Q(x)$ vrai (par ex, $x = -1$)

donc $\left(\exists x\, P(x)\right)$ et $\left(\exists x\, Q(x)\right)$ est vrai.

Mais $\underbrace{\exists x \left(P(x) \text{ et } Q(x)\right)}_{\exists x \left(x \geq 1 \text{ et } x \leq 0\right)}$ est faux.

2. $P(x) = (x \leq 1)$ et $Q(x) = (x > 1)$

si on suppose $\forall x, (x \leq 1 \text{ ou } x > 1)$,

alors $\left(\forall x\, (x \leq 1)\right)$ ou $\left(\forall x\, , (x > 1)\right)$

est faux. Donc 2. n'est pas une tautologie.

exercice 9 : 1- Mq $((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ (✡) est une tautologie.

c'est-à-dire montrer que l'implication est vraie.

- soit on fait une table de vérité.
- soit on fait un raisonnement : on prend cette solution.

Supposons que $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$. (*) est vrai.

raisonnement par disjonction de cas.

Si on a P ou Q (**) alors

soit on a P, et alors par (*), on a R.

sinon P est faux, auquel cas Q est vrai par (**), et alors par (*), on a R

cas 1 : P est vrai

cas 2 : P est faux.

Donc on a montré l'implication (✡) c'est-à-dire (✡) est une tautologie.

2-a. indépendant de la question 1

1ère solution : Soit $n \in \mathbb{Z}$ un nombre impair. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel $n = 2m+1$

On a deux cas : * soit m est pair donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 2k$.

Dans ce cas, $n = 2 \cdot 2k + 1 = 4k+1$.

* sinon, m est impair donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 2k+1$.

Dans ce cas, $n = 2 \cdot (2k+1) + 1$
$= 4k+3$.

2ème solution : On fait la division euclidienne de n par 4 : il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0,1,2,3\}$ tels que

$\boxed{n = 4q + r.}$ écriture unique.

si $r = 0$ ou 2, $n = 2(2q+1)$ est pair

donc comme on suppose n impair, $\boxed{n = 4q + r \text{ avec } r = 1 \text{ ou } 3.}$

[on a montré que si n est impair, alors $n \equiv 1 \, [4]$ ou $n \equiv 3 \, [4]$.]

2.b. [si n est un entier impair, alors $(n^2 \equiv 1 \, [8]) \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z} \text{ tq } n^2 = 8m+1)$]

b. Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier impair.

$P = (n$ est de la forme $4k+1$, $k \in \mathbb{Z})$

$Q = (n$ est de la forme $4k+3$, $k \in \mathbb{Z})$

$R = (n^2$ est de la forme $8m+1$, $m \in \mathbb{Z})$

, $(P \text{ ou } Q) \overset{\text{par 2.a}}{=} (n \text{ impair})$

* Si on a P, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 4k+1$.

Dans ce cas, $n^2 = (4k+1)^2$
$= 16k^2 + 8k + 1$
$= 8(2k^2+k) + 1$

donc R est vrai (on prend $m = 2k^2 + k$)

* Si, on a Q : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 4k+3$.

Ainsi, $n^2 = 16k^2 + 24k + \underbrace{9}_{8+1}$

$= 8\left(2k^2 + 3k + 1\right) + 1.$

Donc on a R (on prend $m = 2k^2 + 3k + 1$).

Donc on a montré. $(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$.

Si n est impair, par 2.a, on a $\underbrace{(P \text{ ou } Q)}_{n \text{ est impair}}$.

Par 1., on a $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$ c'est-à-dire n impair $\Rightarrow (n^2 = 8m+1$ pour un certain $m)$

exercice 10 : contraposition : parfois pour montrer $P \Rightarrow Q$, il est plus facile de montrer l'énoncé équivalent non $Q \Rightarrow$ non P.

[$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\text{non } P) \text{ ou } Q)$

$(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P) \Leftrightarrow (\text{non}(\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P))$

$\Leftrightarrow (Q \text{ ou } (\text{non } P))$]

Pour montrer

$(\forall \varepsilon > 0, |x| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = 0$. il faut et il suffit de montrer la contraposée

qui est $(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon)$. (*)

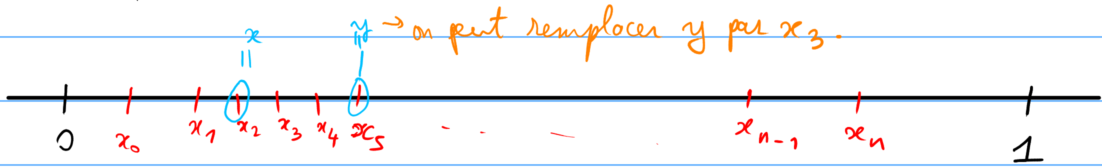
Soit $x \neq 0$. Alors $|x| > 0$, On prend $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$. On a $\varepsilon > 0$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

et $|x| > \varepsilon$. On a donc montré (*).

exercice 11 : raisonnement par l'absurde : Pour montrer un énoncé P, on suppose qu'il est faux et on cherche à obtenir une contradiction

$y \rightarrow$ on peut remplacer y par x_3.



On veut démontrer P := voir feuille 1

1. $P = \left(\exists \underbrace{(x,y)}_{\text{couple}} \in \{x_0, \dots, x_n\}^2, \left(y > x \text{ et } y - x \leqslant \frac{1}{n}\right).\right)$

Comme $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n$, on a aussi :

$P = \exists i \in \{1, \dots, n\}, \ x_i - x_{i-1} \leqslant \frac{1}{n}$.

négation.

2. $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$. (Δ)

3- Il s'agit de montrer que (Δ) est absurde. On suppose donc (Δ).

On a

(*) $0 \leqslant x_n - x_0 \leqslant 1 - 0 = 1$. $1/n$

et

$$x_n - x_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = (\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + (\cancel{x_3} - \cancel{x_2}) + \dots + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) = -x_0 + x_n.$$

sigma = symbole pour une somme

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

12, 13

donc $x_n - x_0 > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$

donc si Δ est vrai, $x_n - x_0 > 1$ $(**)$

$(*)$ et $(**)$ sont en contradiction. L'hypothèse de départ est donc fausse, donc Δ est fausse, donc P est vrai.