TD 18 - Vendredi 18 décembre 2020

exercice 6.6 :

1- $P(X) = X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 20X - 24.$

$\rightsquigarrow \{0, \pm 1, \pm 2, \pm i, \pm 2i\}.$

$P(0) = -24$

$P(1) = 1 - 4 + 3 - 2 + 20 - 24 = -6$

$P(-1) = -1 - 4 - 3 - 2 - 20 - 24 < 0$

$P(-2) = (-2)^5 - 4 \cdot 2^4 \dots < 0$

$P(2) = 32 - 4 \cdot 16 + 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 + 20 \cdot 2 - 24$

$= 32 - 64 + \cancel{24} - 8 + 40 - \cancel{24}$

$= 0$

$\rightsquigarrow$ 2 est une racine de P.

Multiplicité de 2 comme racine de P :

1ère méthode

$P'(X) = 5X^4 - 16X^3 + 9X^2 - 4X + 20$

$P'(2) = 5 \cdot 16 - 16 \cdot 8 + 9 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 20$

$= 80 - 128 + 36 - 8 + 20$

$= 0$

$P''(X) = 20X^3 - 48X^2 + 18X - 4$

$P''(2) = 20 \cdot 8 - 48 \cdot 4 + 18 \cdot 2 - 4$

$= 160 - 192 + 36 - 4$

$= 0$

$P^{(3)}(X) = 60X^2 - 96X + 18$

$P^{(3)}(2) = 240 - 192 + 18$

> 0

Donc la multiplicité de 2 comme racine de P est 3.

Donc $\exists\, Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tq $P(X) = (X-2)^3 Q(X)$

$(X-2)^3 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 20X - 24 & X^3 - 6X^2 + 12X - 8 \quad (= (X-2)^3) \\
- & X^5 - 6X^4 + 12X^3 - 8X^2 & \hline X^2 + 2X + 3 \\
\hline
 & 0 + 2X^4 - 9X^3 + 6X^2 + 20X - 24 & \\
- & 2X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 16X & \\
\hline
 & 0 \quad 3X^3 - 18X^2 + 36X - 24 & \\
- & 3X^3 - 18X^2 + 36X - 24 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$P(X) = (X-2)^3(X^2+2X+3)$

$= (X-2)^3\left(X-(-1+i\sqrt{2})\right)\left(X-(-1-i\sqrt{2})\right)$

$\Delta = -8$

Les racines carrées de Δ sont $\pm i 2\sqrt{2}$.

donc les racines de X^2+2X+3 sont $\dfrac{-2 \pm i2\sqrt{2}}{2}$

$= -1 \pm i\sqrt{2}$

2ème méthode On sait que 2 est racine de P.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 20X - 24 & X - 2 \\
- & X^5 - 2X^4 & \hline X^4 - 2X^3 - X^2 - 4X + 12 \\
\hline
 & 0 \quad -2X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 20X - 24 & \\
- & -2X^4 + 4X^3 & \\
\hline
 & 0 \quad -X^3 - 2X^2 + 20X - 24 & \\
- & -X^3 + 2X^2 & \\
\hline
 & 0 \quad -4X^2 + 20X - 24 & \\
- & -4X^2 + 8X & \\
\hline
 & 0 \quad 12X - 24 & \\
- & 12X - 24 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$P(X) = (X-2)\underbrace{(X^4 - 2X^3 - X^2 - 4X + 12)}_{Q(X)}$.

$Q(2) = \dots = 0$

On continue en faisant la d.e. de Q par $X-2$, ...

E.7 1) $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$.

racine évidente : -1 $P(-1) = -1+1-1+1 = 0$.

$P(X) = (X+1)(X^2+1)$

terme de deg 2 : $X^2 + bX^2$

degré 2

$P(X) = (X+1)(X^2 + \cancel{bX} + 1)$

aX^2+bX+c

P a une seule racine réelle, -1.

2) $P(X) = (X+1)(X^2+1)$ est le produit de deux polynômes

irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ car $X+1$ est de degré 1 et X^2+1 est un polynôme de degré 2 qui n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$.

* X^2+1 a pour racines i et $-i$: $X^2+1 = (X-i)(X+i)$.
donc $P(X) = (X+1)(X-i)(X+i)$ décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

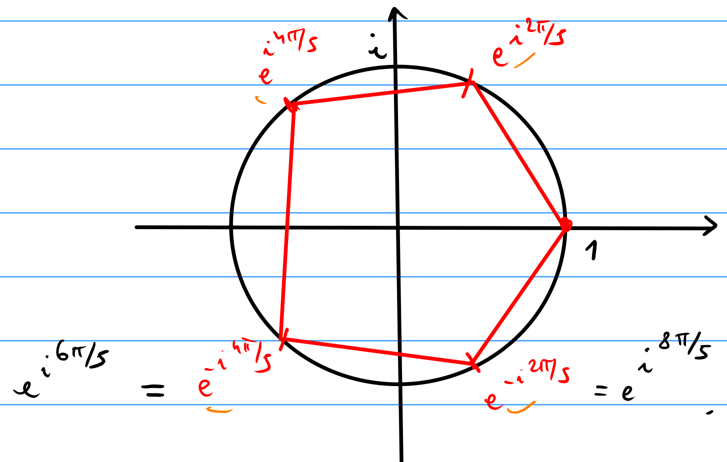
ex 6.8

$$
\begin{array}{rl|l}
X^5 & -1 & X-1 \\
\hline
-\quad X^5 - X^4 & & X^4+X^3+X^2+X+1 \\
\hline
X^4 & -1 & \\
-\quad X^4 - X^3 & & \\
\hline
X^3 & -1 & \\
-\quad X^3 - X^2 & & \\
\hline
X^2 & -1 & \\
-\quad X^2 - X & & \\
\hline
X & -1 & \\
-\quad X & -1 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$\left(X^n - 1 = (X-1)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\right)\right)$.
ici pour $n=5$

Le quotient est $X^4+X^3+X^2+X+1$.

2 - Les racines de P sont les racines 5-ièmes de l'unité $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $0 \leq k \leq 4$



3 - $P(X) = (X-1)\underbrace{(X-e^{i2\pi/5})(X-e^{-i2\pi/5})}_{=\left(X^2 - X\left(e^{i2\pi/5}+e^{-i2\pi/5}\right)+1\right)}\underbrace{(X-e^{i4\pi/5})(X-e^{-i4\pi/5})}_{=X^2 - X\left(e^{i4\pi/5}+e^{-i4\pi/5}\right)+1}$.

$\underbrace{e^{i2\pi/5}+e^{-i2\pi/5}}_{=2\cos(2\pi/5)}$ $\qquad$ $\underbrace{e^{i4\pi/5}+e^{-i4\pi/5}}_{=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$

irréd dans $\mathbb{R}[X]$ car degré 2 et ses racines sont dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

irréd pour la même raison

4-

$$(X^2+aX+1)(X^2+bX+1) = X^4+X^3+X^2+X+1 \iff X^4+(a+b)X^3+(2+ab)X^2+(a+b)X+1 = X^4+X^3+X^2+X+1$$

$$\iff \begin{cases} a+b=1 \\ 2+ab=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+b=1 \\ ab+1=0 \end{cases}$$

explication
$(X-\alpha)(X-\beta) = X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta$
si on connaît $\alpha+\beta=S$, $\alpha\beta=P$,
alors α et β sont les racines de X^2-SX+P

5- $\begin{cases} a+b=1 \\ ab=-1 \end{cases} \iff$ a, b sont les racines de X^2-X-1.

$$\begin{cases} b=-\frac{1}{a} \\ a\neq 0 \\ a-\frac{1}{a}=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-\frac{1}{a} \\ a\neq 0 \\ a^2-a-1=0. \end{cases}$$

$\Delta = 1+4=5$

les racines sont : $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

donc $P(X) = (X-1)\underbrace{\left(X^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1\right)\left(X^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1\right)}_{X^4+X^3+X^2+1.}$.

6- $0 < 2\pi/5 < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$

$\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$ donc $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -2\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

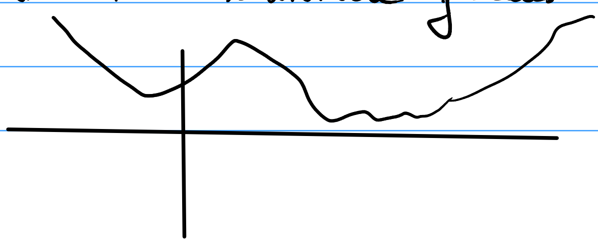
ex 6.9 : Si $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonction polynômiale non constante tq $P'(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$,
(*) alors $\exists!\ x\in\mathbb{R}$, tq $P(x)=0$.

1- $P(X) = X^3+2X^2+7X+5$.

a- $P'(X) = 3X^2+4X+7$

$$\Delta = 16-4\cdot 3\cdot 7 = 16-84 < 0$$

donc P' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty} P'(x) = +\infty$



donc $P'(x) > 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$
par le thm des valeurs intermédiaires.

Par la propriété ⊛, $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ tq $P(x)=0$.

x est une racine simple. En effet, si x était une racine double de P, alors $P(x)=0=P'(x)$. Or P' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc x est une racine simple de P.

b- P est degré 3 donc a 3 racines $\underbrace{\text{complexes}}_{\{x,a,b\}}$ (comptées avec multiplicité). On sait par a). que il a une seule racine réelle donc P a 2 racines complexes non réelles, a, b. Comme P est à coefficients réels, $\bar{a}=b$. Si $a=b$, alors $a=\bar{a}$ et donc $a\in\mathbb{R}$: absurde. Donc $a\neq b$.

2- $P(X) = X^3-3X^2+3X-1 = (X-1)^3$

a- $P'(X) = 3X^2-6X+3$. $\qquad \Delta = 36-4\cdot3\cdot3$
$= 3(X-1)^2 \geqslant 0 \qquad = 0$

par (*), P a une unique racine réelle.

b) Mais. $P(1)=0 \rightsquigarrow P(X) = (X-1)(\overset{aX^2+bX+c}{X^2-2X+1})$ $\qquad b-a=-3 \Leftrightarrow b-1=-3$, $b=-2$

$= (X-1)^3$.

1 est racine triple de P.

c) NON.

Comment démontrer (*)

- $P'(x)\geqslant 0 \ \forall x \rightsquigarrow P$ fonction croissante.

si $P(x)=P(y)=0 \quad x<y$

$\Rightarrow P(z)=0 \ \forall z\in[x,y]$.
$\Rightarrow P$ a une infinité de racines
$\Rightarrow P=0$: absurde si on suppose P non constant.

Donc P a au plus 1 racine réelle.

$P'(x)\geqslant 0 \ \forall x \Rightarrow \deg P'$ pair

Sinon, $P'(x) = aX^k +$ terme de plus petit degré $\quad a\neq 0$.

$\lim_{x\to+\infty} P'(x) = \operatorname{sgn}(a)\infty$
$\lim_{x\to-\infty} P'(x) = -\operatorname{sgn}(a)\infty$ $\Rightarrow P'$ prend des valeurs <0 : absurde.

donc deg P' est pair. donc deg P est impair :

$$P(X) = bX^k + \dots \qquad b \neq 0$$

si $b > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ par le théorème des valeurs intermédiaires, P s'annule.

ex 6-10 : $n \geq 1$, $P_1(X) = X^n$.

$P_2(X) = X^2 - 3X + 2$.

$\boxed{P_1 = P_2 Q + R}$ $\qquad$ $\deg R < \deg P_2 = 2$

a- $\Delta = 9 - 8$ $\qquad$ $\frac{3 \pm 1}{2} \leadsto 2$ et 1.

$$\boxed{P_2(X) = (X-2)(X-1)}$$

b- $\deg R \leq 1$ donc $R = aX + b$, $a, b \in \mathbb{C}$.

c- $\begin{cases} P_1(1) = R(1) \\ P_1(2) = R(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases}$

d- $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n. \end{cases}$

donc $R(X) = (2^n - 1)X + (2 - 2^n)$. $\qquad$ $n = 3$; $R(X) = 7X - 6$.

$n = 3 \dots X^3$

$$\begin{array}{l|l} & X^2 - 3X + 2 \\ \hline & \dots \end{array}$$