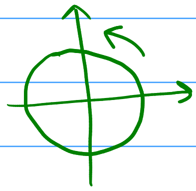
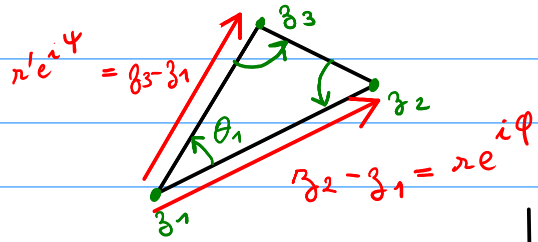
# TD17 – Vendredi 11 décembre 2020

## Géométrie dans le plan avec les nombres complexes

$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \ni (x,y)$

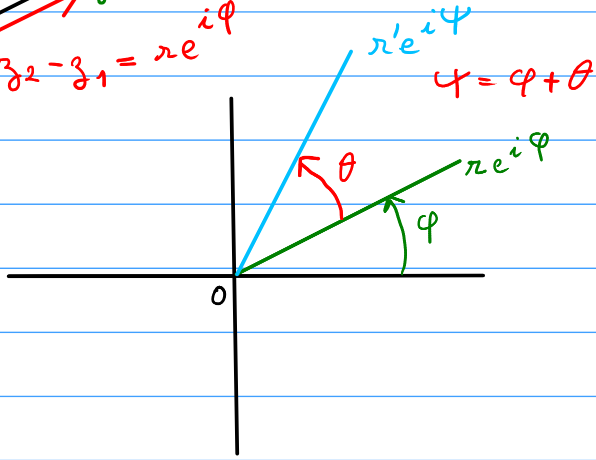
$z = x+iy \in \mathbb{C}$

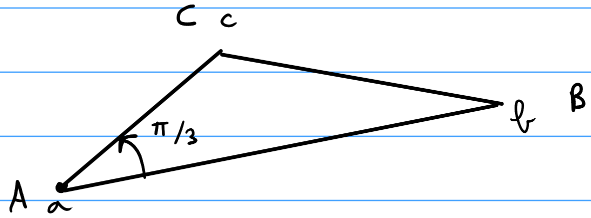


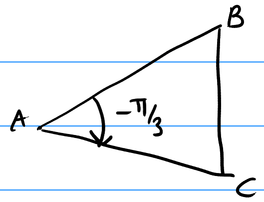



$$\theta_1 = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)$$

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{r'e^{i\psi}}{re^{i\varphi}} = \frac{r'}{r}e^{i(\psi-\varphi)} = \frac{r'}{r}e^{i\theta_1}$$



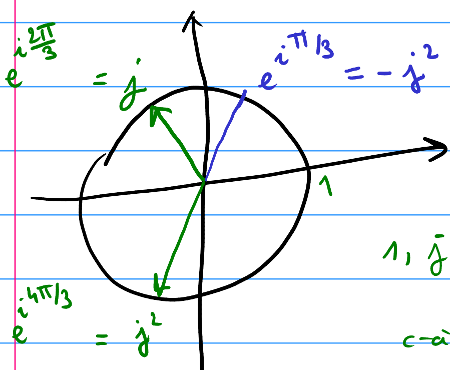




indirect..

<u>Question</u> : Caractériser le fait que ABC est un triangle équilatéral en termes de nombres complexes.

ABC équilatéral direct. $\iff \begin{cases} AB = AC \\ \text{et} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi/3. \end{cases} \iff$ $\overrightarrow{AC}$ s'obtient à partir de $\overrightarrow{AB}$ en faisant une rotation d'angle $\pi/3$.




$\iff (c-a) = e^{i\pi/3}(b-a)$

$1, j, j^2$ sont les racines cubiques de $1$, $j^3 = 1$. $\quad j^4 = j^3 j = j$

c-à-d. les racines de $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$

$1 + j + j^2 = 0 \quad$ (TD 5)

$\iff 1 + j^2 = -j$

$\iff (c-a) = -j^2(b-a)$

$\iff 0 = (a + j^2 a) - j^2 b - c$

$\iff 0 = (1+j^2)a - j^2 b - c$

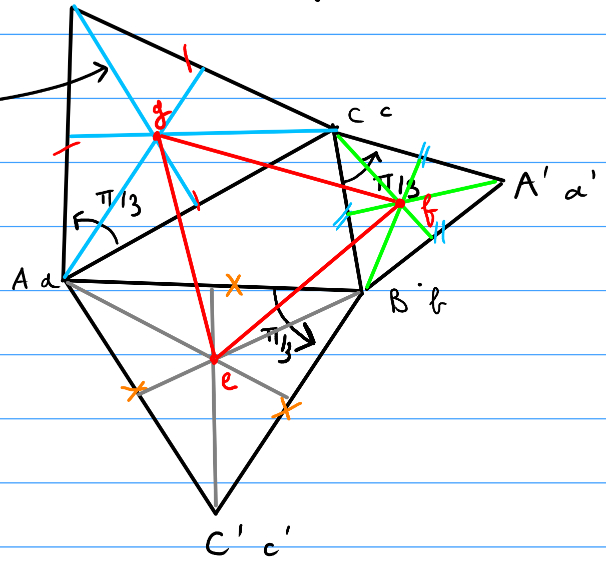
$\iff 0 = ja + j^2 b + c$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{0 = a + jb + j^2 c}$$
$\times j^2$

$$b' - a = e^{i\pi/3} \cdot (c-a)$$

## Application :

médianes
intersection
= centre
de gravité
du triangle




$$b' = a + e^{i\pi/3} \cdot (c-a)$$

$$a' = c + e^{i\pi/3}(b-c)$$

$$c' = b + e^{i\pi/3}(a-b)$$

On doit avoir : $a + jc + j^2 b' = 0$ car $ACB'$ est éq. direct.

$$\Longleftrightarrow b' = \frac{-a - jc}{j^2}.$$

Le triangle en rouge est équilatéral.

$$\Updownarrow$$

$$e + jf + j^2 g = 0$$

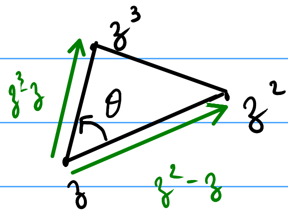
$$\left\{\begin{array}{ll} e = \dfrac{a+b+c'}{3}, & = \text{fonction de } a, b, c \\ f = \dfrac{b+a'+c}{3} & = \ldots \\ g = \dfrac{a+b'+c}{3} & = \ldots \end{array}\right.$$

## Autres questions

si $z \in \mathbb{C}$.

À quelle condition $z, z^2, z^3$ forment un triangle rectangle en $z$ ?

- $z \neq 0$
- Vrai triangle :
  $z \neq z^2$,
  $z \neq z^3$.




$$\theta = \operatorname{Arg}\left(\frac{z^3 - z}{z^2 - z}\right)$$

Rp si $\alpha \in \mathbb{C}$,
$\operatorname{Arg}(\alpha) = \pm\pi/2$
$\Longleftrightarrow \alpha = r e^{i\pi/2}$
$\Longleftrightarrow \alpha = ri$
$\Longleftrightarrow \alpha$ est imaginaire pur
$\Longleftrightarrow \overline{\alpha} = -\alpha$

$\theta = \pm\dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{z^3 - z}{z^2 - z}$ imaginaire pur

$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{z}^3 - \overline{z}}{\overline{z}^2 - \overline{z}} = -\frac{z^3 - z}{z^2 - z}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{z}^2 - 1}{\overline{z} - 1} = -\frac{z^2 - 1}{z - 1}$$

$\iff (\bar z^2-1)(z-1) = -(z^2-1)(\bar z-1)$

$\iff (\bar z-1)(\bar z+1)(z-1)+(z-1)(z+1)(\bar z-1)=0$

$\iff (\bar z-1)(z-1)\left[z+\bar z+2\right]=0$

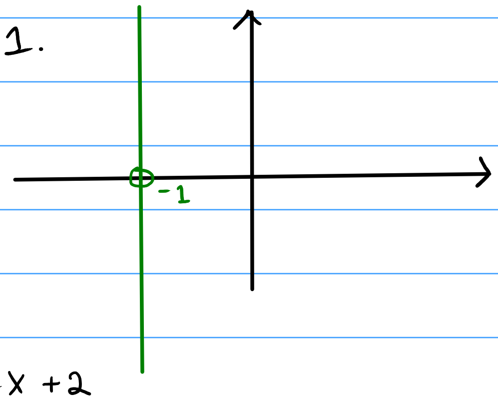
$\iff \underbrace{\cancel{\bar z = 1 \text{ ou } z=1}}_{\text{même condition}}$ ou $z+\bar z=-2$

$z=\alpha+i\beta$ $\quad\iff z+\bar z=-2$

$\iff 2\alpha=-2$

$\iff \alpha=-1.$

Donc $z=-1+i\beta.$




## Feuille 6 :

**exercice 6.1** $\qquad P(X) = 2X^3+7X^2+7X+2$

[Parfois, on demande de trouver une racine évidente d'un polynôme P.
Il faut comprendre : trouver une racine de P dans l'ensemble $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm i, \pm 2i\}$.]

$P(-2) = 2\cdot(-2)^3+7\cdot(-2)^2+7(-2)+2$

$= -16+28-14+2$

$=0$

$P(-2)=0 \iff \underset{X-(-2)}{\overset{\|}{X+2}} \mid P.$

$$\begin{array}{rl|l} P(X)= & 2X^3+7X^2+7X+2 & X+2 \\ \hline - & 2X^3-4X^2 & 2X^2+3X+1 \\ \hline & 3X^2+7X+2 & \\ - & 3X^2-6X & \\ \hline & X+2 & \\ - & X-2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

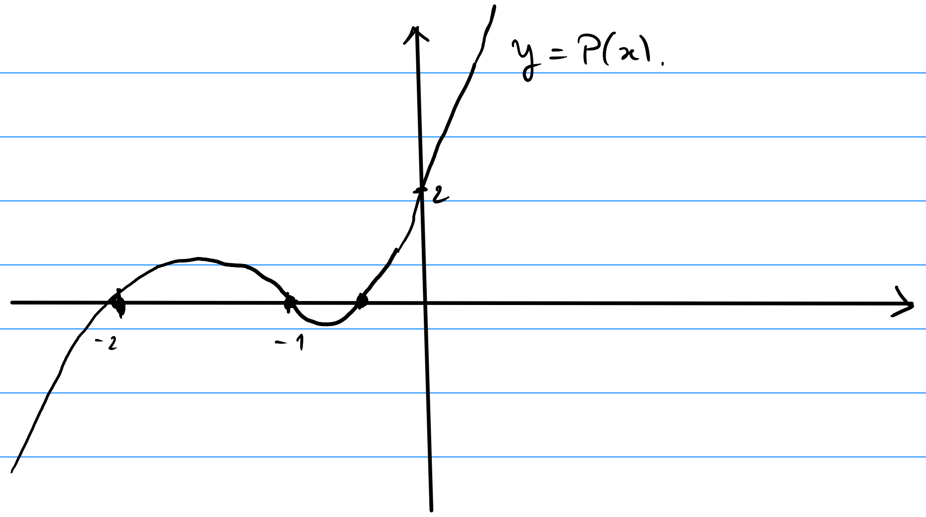
donc $P(X)=(X+2)(2X^2+3X+1).$

On résout $2X^2+3X+1=0$

$\Delta = 9-8=1$ $\qquad$ Les racines sont $\dfrac{-3\pm 1}{2\cdot 2} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{2}. \end{cases}$

donc $2X^2+3X+1 = 2(X+1)(X+\frac{1}{2})$

Donc $\boxed{P(X) = 2(X+2)(X+1)(X+\frac{1}{2})}$ .




ex 6.2 : $a \in \mathbb{R}$ $\qquad P(X) = 4X^2 + (a-1)X + 1.$

P a une racine double $\Leftrightarrow \Delta = (a-1)^2 - 16 = 0.$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 16$

$\Leftrightarrow a-1 = \pm 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 4 \\ \text{ou} \\ a-1 = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ \text{ou} \\ a = -3 \end{cases}$

$\Delta = 0$ $\quad \frac{-\beta \pm \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2\alpha}$

si $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$ a une racine double, celle-ci vaut $\frac{-\beta}{2\alpha}$

La racine double vaut :

$$\frac{a-1}{8} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } a = 5 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } a = -3 \end{cases}$$

$X^2 + 2iX + \overbrace{i^2+1}^{0} - 2 = (X+i)^2 - 1^2$
" astuce $\qquad = (X+i+1)(X+i-1)$

6.3. $P(X) = X^2 + 2iX - 2$ $\qquad$ racines : $\frac{-2i \pm 2}{2}$

$\Delta = (2i)^2 + 8$

$= -4 + 8 = 4$ $\qquad \{1-i, -1-i\}$

$P(X) = (X - (1-i))(X+1+i)$

$Q(X) = X^2 + 2X + (1-2i)$ $\qquad \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Delta = 4 - 4(1-2i)$

$= 8i = 8e^{i\pi/2}$

$z = a+ib$
$z^2 = 8i$
$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 8 \end{cases}$

Les racines carrées de $\Delta$ sont $\pm 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = \pm(2+2i)$

racines de Q : $\frac{-2 + (2+2i)}{2} = i$

$\frac{-2 - (2+2i)}{2} = -2 - i.$

$Q(X) = (X-i)(X+2+i)$

<u>ex 6.4 :</u> · $X-1 \mid P \iff 1$ est racine de $P$

$\iff P(1) = 0$

$\iff 1 + a - 2a + 2$

$\iff a = 3.$

2-

$$\begin{array}{r|l} X^3 + aX^2 - 2aX + 2 & X-1 \\ \hline -X^3 + X^2 & X^2 + (a+1)X + (1-a) \\ \hline (a+1)X^2 - 2aX + 2 & \\ -(a+1)X^2 + (a+1)X & \\ \hline (1-a)X + 2 & \\ -(1-a)X + 1-a & \\ \hline 3-a & \end{array}$$

donc $P(X) = (X-1)\left(X^2 + (a+1)X + (1-a)\right) + 3-a.$

$X-1 \mid P \iff$ le reste est nul

$\iff 3-a = 0$

$\iff a = 3.$

<u>ex 6.5</u> $P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 1.$

On teste $\pm i, \pm 2i.$

On calcule $P(i) = 1 + \cancel{3i} - 2 - \cancel{3i} + 1 = 0$

- Par chance, on a trouvé une racine de P du premier coup.
- Comme P est à coeffs réels, $\bar{i} = -i$ est aussi une racine de P.

[ $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$, $z \in \mathbb{C}$ racine de $Q$

$Q(X) = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$ $\quad a_i \in \mathbb{R}$

On a $Q(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i z^i = 0$ donc $\sum_{i=0}^{N} \overline{a_i}\, \bar{z}^i = 0$ car $a_i \in \mathbb{R}$. donc $\bar{z}$ est racine de $Q$

$\overline{Q(z)} = \sum_{i=0}^{N} a_i \bar{z}^i = 0$

$i, -i$ sont racine de $P$.

donc $P(X) = (X-i)(X+i)(aX^2+bX+c)$.

Comment trouver $a, b, c$ ?

- méthode bébé : On développe tout et on identifie les coefficients.
- méthode 2 ; on a $(X-i)(X+i) = X^2+1$

On fait la division euclidienne de $P$ par $X^2+1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -3X^3 & +2X^2 & -3X & +1 & X^2+1 \\
\cline{6-6}
-X^4 & & -X^2 & & & X^2-3X+1 \\
\cline{1-5}
& -3X^3 & +X^2 & -3X & +1 & \\
& +3X^3 & & +3X & & \\
\cline{2-5}
& & X^2 & & +1 & \\
& & -X^2 & & -1 & \\
\cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}
$$

donc $P(X) = (X-i)(X+i)(X^2-3X+1)$

$$\boxed{P(X) = (X-i)(X+i)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).}$$

$\left[\Delta = 5 \quad \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right]$