TD 10 – Relations d'ordre sur un ensemble.

(symboles possibles $\leq$, $\preccurlyeq$, $\subset$, $\mathcal{R}$)

Relations d'ordre sur X. Pour $x, y \in X$,

$x \leq y$

$\leq$ est une relation d'ordre.

- réflexivité : $\forall x \in X,\ x \leq x$
- transitivité : $\forall x,y,z \in X,\ (x \leq y,\ \text{et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.
- antisymétrie : $\forall x,y \in X,\ (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$.

Rappel : pour une relation d'équivalence, on avait : réflexivité, transitivité et $\boxed{\text{symétrie}}$

Une relation d'ordre peut être totale ou partielle : $\exists x,y \in X,\ \text{non}(x \leq y)$ et $\text{non}(y \leq x)$

"x et y ne sont pas comparables"

→ $\forall x,y \in X,\ (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$

* X ensemble

$\mathcal{P}(X)$, $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(X)$.

$X = \{0,1\}$ $\qquad \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

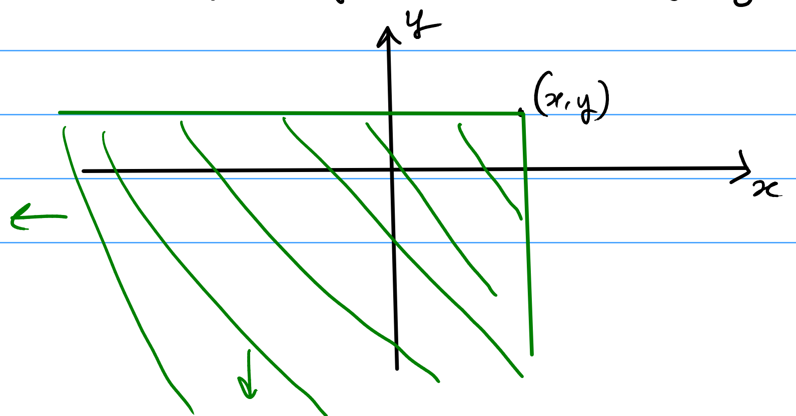
$\{0\}$ et $\{1\}$ ne sont pas comparables

* divisibilité sur $\mathbb{N}$: $\forall m,n \in \mathbb{N}$ n / m si n divise m est une relation d'ordre partiel : $n=2,\ m=3$, $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$

donc 2 et 3 ne sont pas comparables pour $/$.

exercice 3.7 : $(\mathbb{R}, \leq)$.

1. sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ si $x \leq x'$ et $y \leq y'$.



R est une relation d'ordre

* réflexivité : Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y) R (x,y)$ car $x \le x$ et $y \le y$.

* transitivité. Soient $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ tel que
$(x,y) R (x',y')$ et $(x',y') \le (x'',y'')$.

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \le x' \\ \text{et} \\ y \le y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \le x'' \\ y' \le y'' \end{pmatrix}$$

donc $x \le x''$ et $y \le y''$ donc $(x,y) R (x'',y'')$.

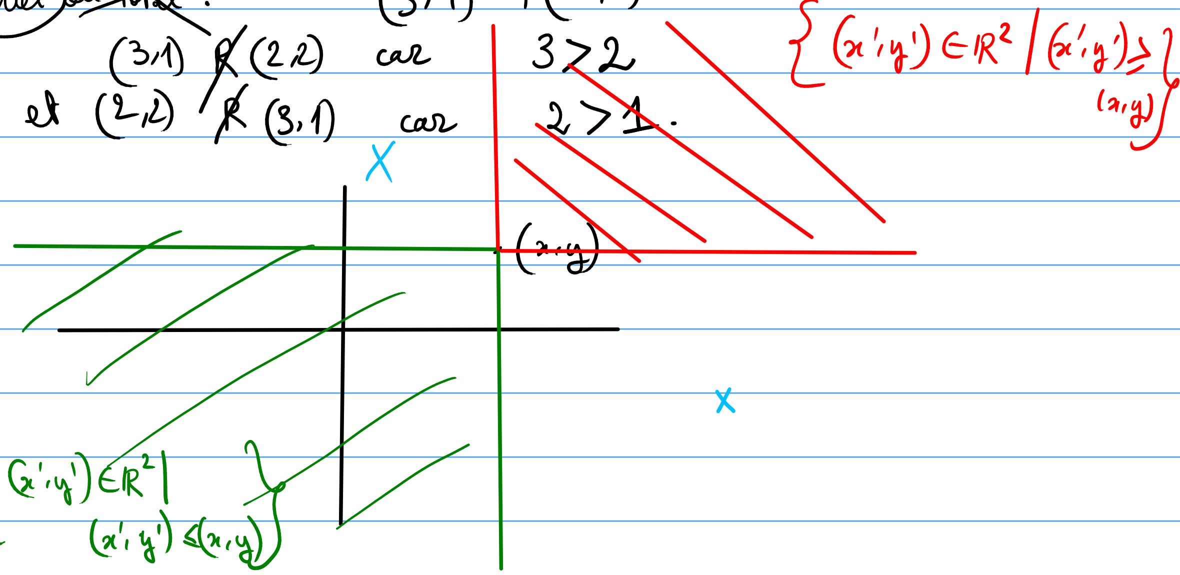
antisymétrie : Soient $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tq $(x,y) R (x',y')$ (1) et $(x',y') R (x,y)$ (2)

alors $\begin{cases} x \le x' \text{ et } y \le y' \\ x' \le x \text{ et } y' \le y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ donc $(x,y) = (x',y')$

ordre partiel ou ~~total~~ ? $(3,1)$, $(2,2)$

$(3,1) \not R (2,2)$ car $3 > 2$

et $(2,2) \not R (3,1)$ car $2 > 1$.



2- $(x,y) R (x',y')$ si $(x \leq x'$ ou $y \leq y')$.

<u>réflexivité</u> : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leq x$ ou $y \leq y)$ est vrai donc $(x,y) R (x,y)$.

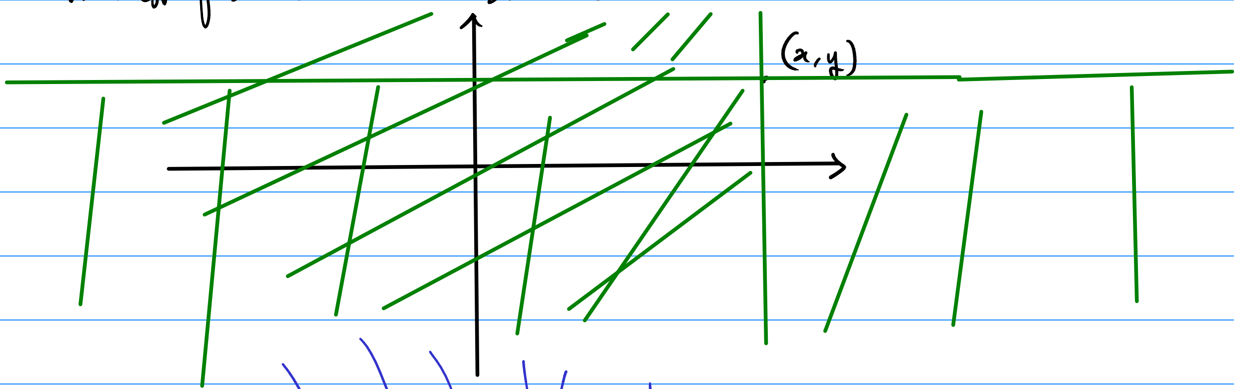
<u>antisymétrie</u> : FAUX.

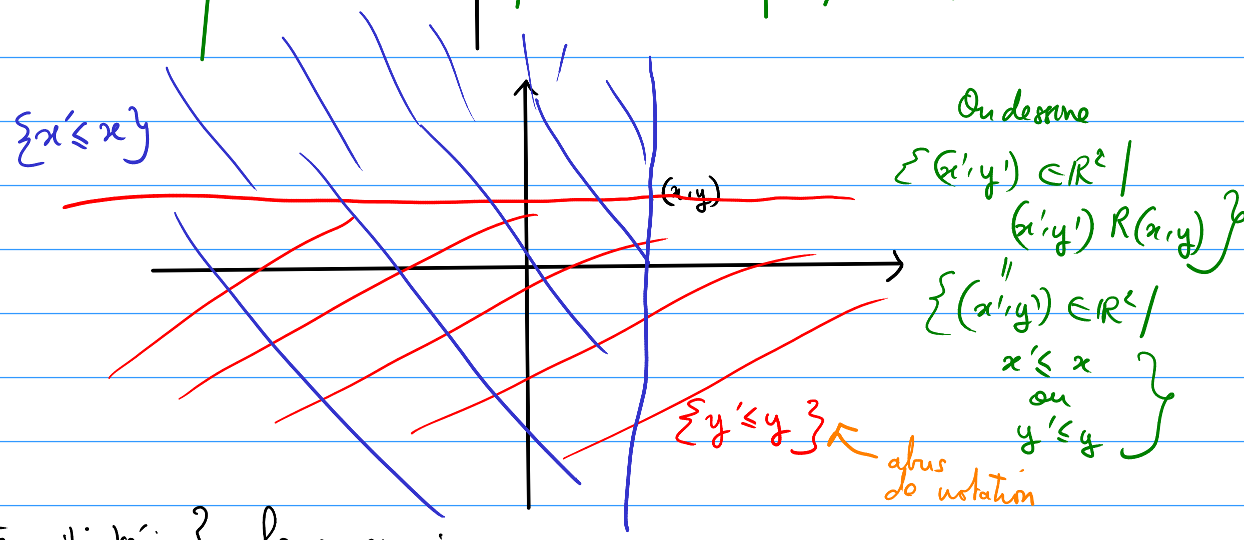
$(0,1) R (1,0)$ car $0 \leq 1$.

et $(1,0) R (0,1)$ car $0 \leq 1$

Or, $(0,1) \neq (1,0)$ donc R n'est pas antisymétrique.

Donc R n'est pas une relation d'ordre





<u>transitivité</u> : ? faux, exercice.

3- $(x,y) R (x',y')$ si $(x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y'))$

(ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$)

<u>réflexivité</u> Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x = x$ et $y \leq y$ donc $(x,y) R (x,y)$.

<u>transitivité</u> Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ avec $(x,y) R (x',y')$
$(x',y') R (x'',y'')$.

$$(x,y)R(x',y') \iff \begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leq y'. \end{cases} \quad (1)$$

$$(x',y')R(x'',y'') \iff \begin{cases} x' < x'' \\ \text{ou} \\ x' = x'' \text{ et } y' \leq y'' \end{cases} \quad (2)$$

Cas 1. $x < x'$ Par (2) $x' \leq x''$. Donc $x < x''$ et donc $(x,y) R (x'',y'')$.

Cas 2 On a $x = x'$ et $y \leq y'$.

* Soit $x' < x''$ auquel cas $x < x''$ et donc $(x,y) R (x'',y'')$.
* Soit $x' = x''$ et $y' \leq y''$. Donc $x = x' = x''$ et $y \leq y' \leq y''$ et donc $x = x''$ et $y \leq y''$. donc $(x,y) R (x'',y'')$.

antisymétrie : Soit (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ telsque $(x,y)R(x',y')$ et $(x',y')R(x,y)$

Alors

$$\begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leq y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' < x \\ \text{ou} \\ x' = x \text{ et } y' \leq y. \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x \leq x'. \qquad\qquad x' \leq x$$

donc $x = x'$.

Et donc $y \leq y'$ et $y' \leq y$ donc par l'antisymétrie de $\leq$ sur $\mathbb{R}$, $y = y'$. Donc $(x,y) = (x',y')$.

R est donc une relation d'ordre.

Cet ordre est total : Soit (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$,

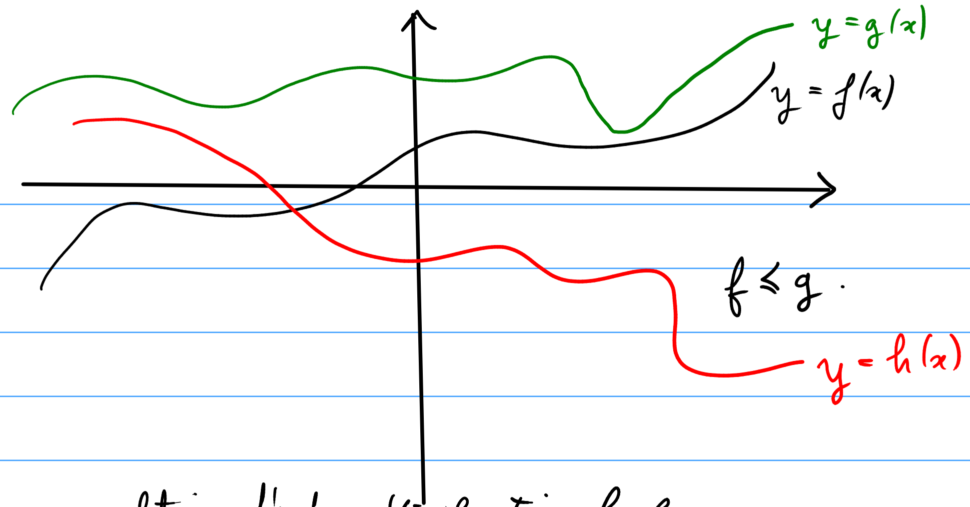
* Soit $x < x'$ et on a $(x,y) R (x',y')$.

Sinon $x \geq x'$. On a encore 2 cas :

* $x > x'$ auquel cas $(x',y') R (x,y)$.
* $x = x'$. Si $y \leq y'$, alors $(x,y) R (x',y')$
  si $y' \leq y$, alors $(x',y') \leq (x,y)$.

donc l'ordre est total.

4.



$\leq$ est bien une relation d'ordre. Vérification facile.
f et h ne sont pas comparable pour $\leq$ donc l'ordre est partiel.

exercice 38 : sur $\mathbb{N}$: $x R y \Leftrightarrow \exists n,m \geq 1$ tq $y = n x^m$.

1- Soient $x,y\in\mathbb{N}$ telsque xRy : $\exists m,n\geq 1$, $y=nx^m$

On a 2 cas. * si $x=0$, alors $y=0$ donc $x\leq y$

* si $x\neq 0$, alors $y = n.x^m$.

Or, $n\geq 1$ et $x\geq 1$ (car $x\in\mathbb{N}$ et $x\neq 0$).

donc $x^m \geq x$

donc $\underbrace{nx^m}_{=y} \geq n.x \geq x$

Finalement, $x\leq y$.

2- reflexivité Soit $x\in\mathbb{N}$. $xRx \Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tq $x = nx^m$

On prend $m=n=1$.

antisymetrie : Soient $x,y\in\mathbb{N}$ tels que xRy et yRx. Alors par 1., $x\leq y$ et $y\leq x$. Donc par antisymétrie de $\leq$ sur $\mathbb{N}$, $x=y$.

transitivité : soit $x,y,z\in\mathbb{N}$ telsque xRy et yRz :

$\exists m,n\geq 1$ telque $y=nx^m$ et $\exists p,q\geq 1$ tq $z=py^q$

donc
$$\begin{aligned} z &= p(nx^m)^q \\ &= pn^q.(x^m)^q \\ &= (pn^q)x^{mq} \\ &= (\text{entier}\geq 1)\times x^{(\text{entier}\geq 1)}. \end{aligned}$$

donc xRz

donc R est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

3. Comme $2 \leq 3$ donc si 2 et 3 étaient comparables, alors par 1 ; on a $2 R 3$.

Or, $2R3 \Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tq $\underline{3 = n2^m}$. Ceci est impossible car $2 \mid \underbrace{n2^m}$ car $m \geq 1$ mais $2 \nmid 3$. Donc une telle écriture est impossible.

exercice 3-9 $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(X)$.

1- $\phi \in \mathcal{P}(X)$

A est un ppe de $\mathcal{P}(X)$ si $\forall E \in \mathcal{P}(X)$, $A \subset E$.

$A = \phi$ répond bien à cela. Donc $A = \phi$ est le ppe de $\mathcal{P}(X)$.

* B est un p.g.e de $\mathcal{P}(X)$ si $\forall E \in \mathcal{P}(X)$, $E \subset B$.

$B = X$ répond bien à cette demande. Donc X est le pge de $\mathcal{P}(X)$.

2- $\mathcal{P}(X) \setminus \{\phi\}$ = ensemble des parties non vides de X

$C \in \mathcal{P}(X)\setminus\{\phi\}$ est minimal si $\forall D \in \mathcal{P}(X)\setminus\{\phi\}, \left(D \subset C \Rightarrow D = C\right)$

L'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{P}(X)\setminus\{\phi\}$ est

$$\{\{x\} : x \in X\}.$$

On note $\mathcal{M} = \{$ élts minimaux de $\mathcal{P}(X)\setminus\{\phi\}\}$.

On veut montrer que $\mathcal{M} = \{\{x\} : x \in X\}$.

$\supset$ Soit $x \in X$. Il s'agit de mq $\{x\}$ est minimal dans $\mathcal{P}(X)\setminus\{\phi\}$.

Or, si $E \subset \{x\}$, alors $E = \phi$ ou $E = \{x\}$.

Si $E \in \mathcal{P}(X)\setminus\{\phi\}$, alors $E = \{x\}$. donc $\{x\} \in \mathcal{M}$.

$\subset$ Soit $E \in \mathcal{M}$. Comme $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)\setminus\{\phi\}$, $E \in \mathcal{P}(X)$ et $E \neq \phi$.

Donc $\exists x \in X, \{x\} \subset E$.

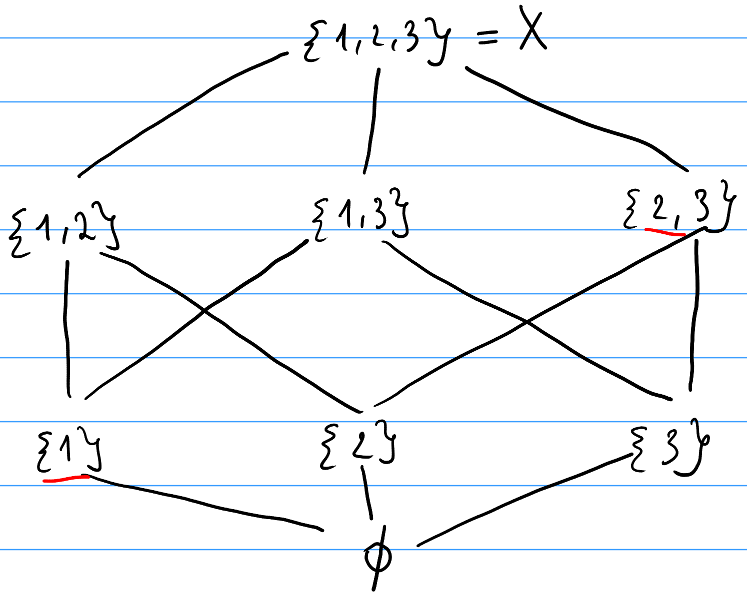
Or $\{x\} \in \mathcal{P}(X)\setminus\{\phi\}$.

Comme E est minimal, $\{x\} = E$. Donc $\mathcal{M} \subset \{\{x\} : x \in X\}$.

Si $\mathrm{card}(X) \geq 2$, alors $\forall x \in X$, $\{x\}$ n'est pas un ppe de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.
car $\exists y \in X$, $y \neq x$ et $\{x\}$, $\{y\}$ ne sont pas comparables pour l'inclusion.

Si $\mathrm{card}(X) = 1$, $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} = \{X\}$, X est le ppe de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.
$(X = \{0\})$ (pge, ...)

3- $X = \{1,2,3\}$ ordonné par $\subset$. $\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X} = 2^3 = 8$.
Le treillis de cet ensemble ordonné est :



$X = \{1,2,3,4\}$ $\#\mathcal{P}(X) = 16$.

exercice 10 : sur $\mathbb{N}$, $x | y \iff x$ divise y
$\iff \exists k \in \mathbb{N}$ tq $y = kx$. $(*)$

1- antisymétrie : si $x|y$ et $y|x$, alors $x \leq y$ et $y \leq x$ donc $x = y$.
reflexivité : soit $x \in \mathbb{N}$. Alors $x | x$ car $x = 1 \cdot x$ ($k = 1$ dans $(*)$)
transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$ tq $x | y$ et $y | z$

Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $y = kx$
$\exists l \in \mathbb{N}$ tq $z = ly$.

donc $z = lkx$.

donc $z = (\text{entier}) \times x$ donc $x | z$.

donc $|$ est une relation d'ordre.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

2- $a \in \mathbb{N}$ est le ppe de $\mathbb{N}$ si $\forall y \in \mathbb{N}$, $a | y$.

$a = 1$ vérifie cette propriété. Donc 1 est le ppe de $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité

$b \in \mathbb{N}$ est pge de $\mathbb{N}$ si $\forall y \in \mathbb{N}$, $y | b$.

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $b = yk$]

si $b = 0$, $\forall y \in \mathbb{N}$, $0 = y \cdot 0$. Donc 0 est le pge de $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité.

3- élts minimaux de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ = ensemble des nombres premiers.

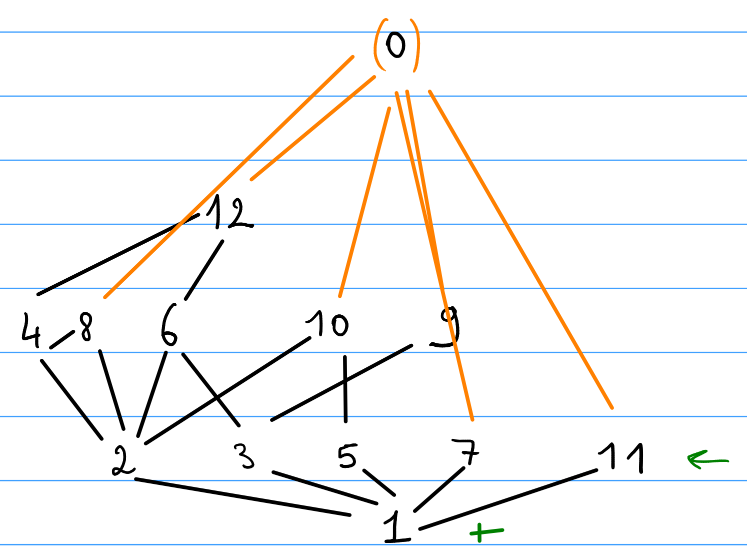
$a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ est minimal si $\forall y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $y | a \Rightarrow y = a$.

$\mathcal{M} = \{$ élts minimaux de $\mathbb{N} \setminus \{1\}\}$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$ un nbre premier. Si $y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, y/p, $y = p$. donc p est un élt min de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

- Soit $n \in \mathcal{M}$. $n \neq 1$ donc $\exists p \in \mathbb{N}$ un nbre premier tel que p/n.
  Comme n est minimal, $p = n$.
  Donc $\mathcal{M} = \{$nombres premiers$\}$.

4



* $2 = 2$ est un produit de nombres premiers

$\mathcal{P} = \{\text{nombres premiers}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$

$n \in \mathbb{N}$ est produit de nbres premiers si $\exists\, k \geqslant 0$ et $A \in \mathcal{P}^k$

tels que $n = \prod_{a \in A} a$.

$2 \rightsquigarrow$ on prend $k = 1$ et $A = \{2\} \in \mathcal{P}$.

$$2 = \prod_{a \in A} a = 2$$

$$\prod_{a \in \emptyset} a = 1.$$

$- \times -$

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x \times y$$

infixe
préfixe
suffixe