Groupe IM2 — TD1 - Vendredi 18 septembre. - Feuille 1

Exercice 1- En général, la solution n'est pas unique.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ ou bien $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geqslant 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x \geqslant x^2$
3. non $(\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, n \geqslant m)$

   soit en enlevant la négation : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n < m$.
4. non $\left(\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), x = \frac{m}{n}\right)$

   soit : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), x \neq \frac{m}{n}$
5. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = m \cdot k$.

   ou bien en utilisant le fait que n est multiple de tous les autres entiers si et seulement si tous les autres entiers divisent n,

   $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \underbrace{m | n}_{\text{"m divise n"}}$

6. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left(x \neq y \Rightarrow (\exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y \text{ ou } y < r < x)\right)$
7. Si on utilise le fait que deux nombres réels x et y sont de même signe si et seulement si leur produit est positif, une solution est :

   $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \exists (a,b) \in \{x,y,z\}, ab \geqslant 0$.

Une solution plus élémentaire :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, xy \geqslant 0$ ou $xz \geqslant 0$ ou $yz \geqslant 0$.

Exercice 2. En plus de dire si les énoncés sont vrais ou faux, on va dire pourquoi (c'est-à-dire donner une démonstration).

1- Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = -2x + 1$. Alors $2x + y = 1 > 0$.
(Il y a d'autres y qui fonctionnent, par exemple $y = -2x + 3, \dots$)

2- Faux. On peut par exemple montrer que la négation de l'énoncé est vraie. La négation de 2- est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + y < 0$. (*)
Ça ressemble beaucoup à 1 et la démonstration du fait que (*) est vrai est analogue :
Si $x \in \mathbb{R}$, prenons $y = -2x - 1$. Alors $2x + y = -1 < 0$

3- Faux. On trouve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2x + y \leq 0$. On peut prendre $x = y = 0$. (Démonstration par contre-exemple)

4- Vrai. Si on prend $x = y = 1$, on a bien $2x + y = 3 > 0$

5- Vrai. Comme $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq 0$, il suffit de prendre n'importe quel $x < 0$. Par exemple, $x = -1$ vérifie : $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq x$.

6- Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = -2x$. Alors $2x + y = 0$.

7- Faux. En effet, $2x + y > 0$ et $2x + y = 0$ est faux indépendamment des valeurs prises par x et y.

Exercice 3 : On peut faire des tables de vérité, ou bien faire une démonstration directe pour 1, 2 et 3. Pour 4 et 5, on fait une démonstration directe de l'implication.

1.

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

ne contient que des 1
donc l'énoncé 1. est une tautologie.

On peut remarquer que les colonnes entourées en vert sont identiques, donc en fait, on a

$$\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \Longleftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\big).$$

Une autre méthode est de faire une démonstration directe de l'implication

$$\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\big).$$

On suppose $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$. (*)

Si $P \Rightarrow Q$, alors
- soit P est faux, donc $P \Rightarrow R$ est vrai.
- sinon, P est vrai et comme $P \Rightarrow Q$, Q est vrai. Comme $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ et P, on a $Q \Rightarrow R$, donc comme on a Q, on a R. Donc $P \Rightarrow R$

raisonnement par disjonction de cas : on a P ou (non P)

Dans tous les cas, sous l'hypothèse (*), $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.
Donc 1. est une tautologie.

2- Faire une table de vérité : exercice.
Raisonnement direct : on montre l'implication

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \big((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\big).$$

Supposons $P \Rightarrow Q$ (*)
Si $Q \Rightarrow R$, alors par (*), on a $(P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R)$ donc $P \Rightarrow R$.
donc 2. est une tautologie.

3- Faire une table de vérité : exercice.
Raisonnement direct : on démontre l'implication

$$P \Rightarrow ((\text{non}P) \Rightarrow Q)$$

Supposons P.
Alors non P est faux, donc $(\text{non}P) \Rightarrow Q$ est vrai.
Donc 3- est une tautologie.

4. Quand on a des énoncés qui dépendent de x, il n'est pas très pratique de faire une table de vérité.

On a fait un raisonnement par disjonction de cas : on a $\forall x\, P(x)$ ou $\underbrace{\text{non}(\forall x\, P(x))}_{\exists x,\ \text{non}\, P(x)}$

Supposons $\forall x, (P(x)$ ou $Q(x))$. (*).
- Soit $\forall x\ P(x)$.
- Soit $\exists x, \text{non}P(x)$. Dans ce cas, par (*), on a $Q(x)$
  Donc on a montré que $\exists x, Q(x)$.

Donc 4. est une tautologie

5. On raisonne comme pour 4.

Supposons $\forall x, \left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$ (*).

On veut montrer que $\exists x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)$.

Supposons $\exists x\, P(x)$. Soit donc x tel que $P(x)$.

Par (*), on a $Q(x)$: on a bien montré $\exists x\, Q(x)$.

Donc 5. est une tautologie.

Exercice 4 : On peut faire des tables de vérités, ou bien démontrer les équivalences par un raisonnement.

1.

P	Q	P et Q	Q et P
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

colonnes identiques

donc on a bien $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$

2-

P	P ou P
0	0
1	1

colonnes identiques :

$(P \text{ ou } P) \Leftrightarrow P$

3-

P	Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

colonnes identiques

donc

$$(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q \big)$$

On peut aussi le démontrer via un raisonnement : il s'agit de montrer que

$$(P \text{ ou } Q) \Rightarrow \big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q \big) \quad (1)$$

et $$\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q \big) \Rightarrow (P \text{ ou } Q) \quad (2)$$

raisonnement par disjonction de cas : on a P ou (non P)

Montrons (1)

On suppose P ou Q (*)

Si $P \Rightarrow Q$, alors si P est vrai, alors Q aussi.

Sinon, P est faux et par (*), Q est vrai.

Donc $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$: on a démontré (1).

disjonction de cas

Montrons (2)

On suppose $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ (**).

Si P est faux, alors $P \Rightarrow Q$ est vrai. Par (**), on a donc Q

Sinon, P est vrai.

Donc P ou Q est vrai, ce qui montre l'implication (2).

4- On peut faire une table de vérité, ou bien :

$$(P \Leftrightarrow Q) \iff \big((P \text{ et } Q) \text{ ou } (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)\big) \quad (\star)$$

et

$$\text{non}\big((\text{non } P) \Leftrightarrow Q\big) \Leftrightarrow \Big(\text{non}\big(((\text{non } P) \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } (\text{non } Q))\big)\Big)$$

$$\underset{\text{lois de Morgan}}{\iff} \Big(\text{non}\big((\text{non } P) \text{ et } Q\big) \text{ et } \text{non}\big(P \text{ et } (\text{non } Q)\big)\Big)$$

$$\underset{\text{lois de Morgan}}{\iff} \Big(\big(P \text{ ou } (\text{non } Q)\big) \text{ et } \big((\text{non } P) \text{ ou } Q\big)\Big)$$

$$\underset{\text{distributivité}}{\iff} \Big[\cancel{\big(P \text{ et } (\text{non } P)\big)} \text{ ou } (P \text{ et } Q) \text{ ou } \big((\text{non } Q) \text{ et } (\text{non } P)\big) \text{ ou } \cancel{\big((\text{non } Q) \text{ et } Q\big)}\Big]$$

$$\iff \Big[(P \text{ et } Q) \text{ ou } \big((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)\big)\Big] \quad (\star\star)$$

Par $(\star)$ et $(\star\star)$, on a bien l'équivalence voulue.

Faire un raisonnement comme pour 3. est moins agréable dans ce cas.

On a :

5- $$\big(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)\big) \Leftrightarrow \big((\text{non} P) \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\big)$$
$$\Leftrightarrow \big((\text{non} P) \text{ ou } Q \text{ ou } R\big) \qquad (*)$$

et $$\big(Q \text{ ou } (P \Rightarrow R)\big) \Leftrightarrow \big(Q \text{ ou } ((\text{non} P) \text{ ou } R)\big)$$
$$\Leftrightarrow \big(Q \text{ ou } (\text{non} P) \text{ ou } R\big)$$
$$\Leftrightarrow \big((\text{non} P) \text{ ou } Q \text{ ou } R\big) \qquad (**)$$

(*) et (**) permettent d'obtenir l'équivalence 5.

Exercice 5.

1- Plusieurs façons de faire :

Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non $(P \Rightarrow Q)$	P et non Q
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Les deux dernières colonnes sont identiques, donc
non$(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à P et non Q

On dit aussi que

$$\left(\text{non}\,(P \Rightarrow Q)\right) \Leftrightarrow \left(P \text{ et non } Q\right)$$

est une tautologie.

Autre solution : utiliser les lois de Morgan.
On sait que $P \Rightarrow Q$ est équivalent à (non P) ou Q
donc

$$\left(\text{non}\,(P \Rightarrow Q)\right) \Leftrightarrow \text{non}\left((\text{non}\,P) \text{ ou } Q\right)$$

$$\underset{\text{lois de Morgan}}{\Leftrightarrow} \left(\text{non}\,(\text{non}\,P)\right) \text{ et non } Q$$

$$\Leftrightarrow P \text{ et } (\text{non}\,Q)$$

2- Avec $\left(\forall x \in X,\ P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x, (x \in X \Rightarrow P(x))\right)$,
on obtient :

$$\left(\text{non}\,(\forall x \in X,\ P(x))\right) \Leftrightarrow \left(\text{non}\left(\forall x,\ (x \in X \Rightarrow P(x))\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists x,\ \text{non}\,(x \in X \Rightarrow P(x))\right)$$

$$\underset{\text{par le 1.}}{\Leftrightarrow} \left(\exists x,\ (x \in X \text{ et non } P(x))\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\exists x \in X, \left(\text{non } P(x)\right) \right).$$

exercice 6 : on y reviendra au début du TD2.

1. $1 > x$ ou $x > 3$

2. $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \exists x \geqslant x_0, f(x) \leqslant A$ comparer avec l'énoncé original

3. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$