1 - Situation

2 - Contexte et motivation

3 - Opérations

4 - Théorème d'intégralité

5 - Exemples

6 - Renforcements

7 - Historique

8 - Construction des P_λ.

Intégralité cohomologique pour les représentations des groupes réductifs.

On travaille sur $\mathbb{C}$.

1 - Situation

$G = GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $(\mathbb{C}^*)^N$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$....

Plus généralement : G : groupe réductif (radical unipotent trivial)

tout élément agit de façon unipotente sur toutes les repr.

sous groupe unipotent connexe normal max

$\underset{\text{char } 0}{=}$ linéairement réductif (les représentations de dimension finie sont semisimples)

non-exemple : $G = \mathbb{G}_a$ groupe additif

agit sur $V = \mathbb{C}^2$ via

$$\mathbb{G}_a \hookrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

V est extension non triviale de $\mathbb{C}$ par elle-même.

$T \subset G$ tore maximal $T \simeq (\mathbb{C}^*)^{\operatorname{rk} G}$

e.g. diag $\simeq (\mathbb{C}^*)^n \subset GL_n(\mathbb{C})$

représentations : $G \longrightarrow GL(V)$, V $\mathbb{C}$-ev de dimension finie

$GL_2(\mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2$.

caractères : $X^*(T) = \{\alpha : T \longrightarrow \mathbb{G}_m\} \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{rk}\, G}$

cocaractères : $X_*(T) = \{\lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow T\} \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{rk}\, G}$

Accouplement : $\alpha \circ \lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$

$$z \longmapsto z^{\langle \lambda, \alpha \rangle}$$

$$\langle -, - \rangle : X_*(T) \times X^*(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Poids : $T \curvearrowright V$ diagonalisable :

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} V_\alpha$$

$$V_\alpha = \{ v \in V \mid t \cdot v = \alpha(t) v \quad \forall t \in T \}$$

$W(V) = \{ \alpha \in X^*(T) \mid V_\alpha \neq 0 \}$ poids de V.

En particulier : $W(\mathfrak{g})$ poids de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$

ex : $GL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$

$\cup$ $\qquad\qquad\qquad\qquad (1,0) \qquad (0,1)$

$(\mathbb{C}^*)^2$

$$(t_1, t_2) \cdot e_1 = t_1 e_1$$

$$(t_1, e_2) \cdot e_2 = t_2 e_2 .$$

V symétrique : $\dim V_\alpha = \dim V_{-\alpha} \qquad \forall \alpha \in X^*(T)$.

$\simeq$ autodualité

ex: • $T^*V = V \oplus V^*$ $\qquad$ V rep. de G

• V rep. de $SL_2(\mathbb{C})$ $\qquad$ $O(2n+1)$ $\quad$ $Sp(2n)$

• $\mathfrak{g}$ rep adjointe de G.

• toutes les représentations en types B_n, C_n, E_7, E_8, F_2

Groupe de Weyl :

$$W = N_G(T)/T$$

$$N_G(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} = T\}$$

$W_{GL_n} \simeq W_{SL_n} \simeq \mathfrak{S}_n$ permutations, en g$^{\text{al}}$: groupe de Coxeter.

T tore $\quad W_T = \{e\}$

$W \curvearrowright$ poids de V.

Intégralité cohomologique

$H^*_G(V)$ $\qquad$ cohomologie équivariante

V ev $\Rightarrow$ contractible $\qquad \cong H^*_G(pt) \cong H^*(BG)$

E_G esp. top contractible avec action libre de G

$BG = E_G/G$

ex. $H^*_{\mathbb{C}^*}(pt)$: $G = \mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ $\qquad$ libre

$$\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} = \varinjlim_{N\to\infty} \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{P}^\infty = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$$

$$H^*(\mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{Q}[x] / (x^{N+1}) \qquad \deg x = 2$$

$$H^*(\mathbb{P}^\infty) = H^*_{\mathbb{C}^*}(pt) \simeq \mathbb{Q}[x].$$

$T = (\mathbb{C}^*)^n \rightsquigarrow H^*_T(pt) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$

G général : $H^*_G(pt) \cong H^*_T(pt)^W \qquad T \subset G$ tore max.

$\rightsquigarrow H^*_{GL_n}(pt) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ polynômes symétriques.

$G = GL_2(\mathbb{C}) \qquad \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2].$

En général : $H^*_G(pt)$ est une algèbre de polynômes.

en particulier : $\dim_{\mathbb{Q}} H^*_G(pt) = +\infty$

Intégralité cohomologique : extraire un sous-espace

$$P_0 \subset H^*(V/G)$$

générateur (au sens de l'induction parabolique)

$\dim P_0 < \infty$

P_0 = "cohomologie cuspidale" de V/G.

2. Contexte et motivation

(a) ~~Topologie de l'action de G sur V~~ (= du champ quotient V/G)

~~du quotient GIT~~ $V/\!/G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[V]^G)$

schéma affine de t.f (Hilbert)

$V/\!/G$ classifie les G-orbites fermées

ex : (1) $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^N$ $\qquad \mathbb{C}^N/\!/\mathbb{C}^* \cong pt$

mult. poids 1.

(2) $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^2$ $\qquad t\cdot(u,v) = (tu, t^{-1}v)$

$\{xy = \lambda\}$ $\quad \lambda \neq 0$ $\qquad$ sont les orbites fermées

$\{0\}$

$\rightsquigarrow \mathbb{C}^2/\!/\mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}$

$\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[xy] \subset \mathbb{C}[x,y]$.

(3) $G \curvearrowright \mathfrak{g}$ adjointe

$\mathfrak{g}/\!/G \cong \mathfrak{t}/\!/W$ $\qquad \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\ T$

$\cong \mathbb{A}^{\mathrm{rk}\,G}$

(4) non lisse : $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[a,b,c,d]$

$\mathbb{C}^* \circlearrowright \mathbb{C}^4 = V, \quad t\cdot(u,v,w,x) = (tu, tv, t^{-1}w, t^{-1}x)$

$$\mathbb{C}^4 /\!/ \mathbb{C}^* \cong \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[ac, ad, bc, bd]\right)$$

$$\cong \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[A,B,C,D] \big/ \langle AD = BC \rangle\right)$$

quadrique dans $\mathbb{C}^4$.

Calculer des générateurs de $\mathbb{C}[V]^G$: problème difficile et ancien de théorie des invariants, même pour $SL_2(\mathbb{C})$ [invariants des formes binaires]

Sylvester – Franklin, 1879 : degrés ≤ 10 avec erreurs
von Gall, 1880 ; Shioda 1967
Brouwer – Popoviciu 2010 : degré 9 92 générateurs
degré 10 104 générateurs

degré 11 : pas grand chose de connu.

* Certains invariants portent des noms intéressants

catalecticant : invariant de degré $\frac{n}{2}+1$ pour les formes binaires de degré $n \in 2\mathbb{Z}$

canonizant : degré $\frac{n+1}{2}$ pour les formes binaires de degré $n \in 2\mathbb{Z}+1$

Intégralité cohomologique ⇝ calcul algorithmique de $IH^*(V /\!/ G)$ (conjecturalement)

coh. d'intersection $= \begin{cases} \text{coh. singulière si } V/\!/G \text{ lisse} \\ \text{encode de l'info. sur les singularités sinon.} \end{cases}$

ⓑ Topologie de $\mathfrak{M} \xrightarrow{\pi} M$

champ d'Artin lisse

bon espace de module (Alper)

globalisation de $V/G \to V/\!/G$. (= situation locale)

ex. $\mathfrak{M} = \mathrm{Bun}_G$

$$V/G \to V/\!/G \quad \underset{\text{principe local-global}}{\overset{\text{spécialisation}}{\leftrightarrows}} \quad \mathfrak{M} \to M$$

reposant sur des théorèmes de tranches étales (Luna, Alper-Hall-Rydh)

ⓒ Introduire et étudier de nouveaux invariants énumératifs pour (G, V).

③ Opérations

Induction parabolique

V une représentation de G

$\lambda : \mathbb{G}_m \to T$ cocaractère

GL_n

$$G^\lambda = \{ g \in G \mid \lambda(t)\, g\, \lambda(t)^{-1} = g \quad \forall t \in \mathbb{C}^* \}$$

$\subset G$

Levi subgroup (en part. groupe réductif) Note: $T \subset G^\lambda$

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$V^\lambda = \{ v \in V \mid \lambda(t) \cdot v = v \quad \forall t \in \mathbb{C}^* \}$$

$\subset V$

subrep.

$$G^{\lambda \geq 0} = \{ g \in G \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t)\, g\, \lambda(t)^{-1} \text{ existe} \}$$

$\subset G$

sous-groupe parabolique

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$V^{\lambda \geq 0} = \{ v \in V \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot v \text{ existe} \}$$

$\subset V$

Diagramme d'induction

$$\begin{tikzcd}
 & V^{\lambda\geq 0}/G^{\lambda\geq 0} \arrow[dl, "q_\lambda"', "\text{lisse}"] \arrow[dr, "p_\lambda", "\text{propre}"'] & \\
V^\lambda/G^\lambda & & V/G
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Ind}_\lambda := p_{\lambda *} q_\lambda^* \; : H^*(V^\lambda/G^\lambda) \longrightarrow H^*(V/G)$$

induction parabolique

$$\mathrm{Ind}_\lambda : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{W^\lambda} \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^W$$

Formule explicite :

$$k_\lambda := \frac{\displaystyle\prod_{\substack{\alpha \in W(V) \\ \langle \lambda, \alpha \rangle > 0}} \alpha^{\dim V_\alpha}}{\displaystyle\prod_{\substack{\alpha \in W(\mathfrak{g}) \\ \langle \lambda, \alpha \rangle > 0}} \alpha^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}} \in \mathrm{Frac}\left(H^*_T(pt)\right)$$

$$\mathrm{Ind}_\lambda(f) = \frac{1}{|W^\lambda|} \sum_{w \in W} w \cdot (f k_\lambda).$$

<u>Démonstration</u> : Calculs après localisation et calcul de classes d'Euler, en utilisant des résultats de Borel-Weil-Bott.

Classes tautologiques

$H \subset G$ sous-groupe normal

$$H^*_G(pt) \underset{\text{e.v.}}{\simeq} H^*_{G/H}(pt) \otimes H^*_H(pt)$$

non-canonique

$\rightsquigarrow$ action de $H^*_H(pt)$ sur $H^*_G(pt)$.

Théorème d'intégralité cohomologique

$$\lambda \sim \mu \iff \begin{cases} G^\lambda = G^\mu \\ V^\lambda = V^\mu \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \underset{\substack{\circlearrowleft \\ W}}{\mathcal{P}_V} := X_*(T)/\sim \quad \text{ensemble fini}$$

$$G_\lambda = \ker\left(G^\lambda \longrightarrow GL(V^\lambda)\right) \cap Z(G^\lambda) \underset{\text{normal}}{\subset} G$$

$$W_\lambda = \{ w \in W \mid w.\lambda \sim \lambda \} \underset{\text{sous-groupe}}{\subset} W$$

$\varepsilon_{V,\lambda} : W_\lambda \longrightarrow \{\pm 1\}$ tel que

$$k_{w.\lambda} = \varepsilon_{V,\lambda}(w)\, k_\lambda \quad \text{pour } w \in W_\lambda$$

Théorème (H., 2024) Soit V une représentation symétrique de G. Pour $\lambda \in X_*(T)$, il existe un espace vectoriel $P_\lambda \subset H^*_{G^\lambda}(V^\lambda)$ de dimension finie, stable sous l'action de W_λ, tel que

$$\bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \mathcal{P}_V/W} \Big(\underbrace{P_\lambda \otimes H^*(pt/G_\lambda)}_{\subset H^*_{G^\lambda}(V^\lambda) \,+\, W_\lambda\text{-action}} \Big)^{\varepsilon_{V,\lambda}} \xrightarrow[\bigoplus \mathrm{Ind}_\lambda]{} H^*_G(V)$$

est un isomorphisme.

P_λ est gradué par le degré cohomologique

Déf $\quad p_{\lambda,i} := \dim P_\lambda^i \in \mathbb{N}$ $\quad$ invariants de Donaldson-Thomas raffinés associés à (G,V)

$\rightsquigarrow$ nouveaux invariants énumératifs que l'on cherche à comprendre.

$\hookrightarrow$ donner une interprétation géométrique

5- Exemples

① $\underset{G}{\underbrace{GL_2(\mathbb{C})}} \curvearrowright \underset{V}{\underbrace{(T^*\mathbb{C}^2)^g}}$ $\qquad g \geq 0.$

$$d_0 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$
$$t \longmapsto 1$$

$$d_1 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$
$$t \longmapsto (t, 1)$$

$$d_2 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$
$$t \longmapsto (t, t^2)$$

$$d_3 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$
$$t \longmapsto (t, t)$$

- $V^{d_0} = V$, $G^{d_0} = G$, $G_{d_0} = \{1\}$, $W_{d_0} = W$, $k_{d_0} = 1$

  $\varepsilon_{V, d_0} = \mathrm{triv}$

- $V^{d_1} = (T^*(0 \oplus \mathbb{C}))^g$, $G^{d_1} = T$, $G_{d_1} = \mathbb{C}^* \times \{1\} \subset T$, $W_{d_1} = \{1\}$,

  $k_{d_1} = \dfrac{x_1^g}{x_1 - x_2}$ $\qquad \varepsilon_{V, d_1} = \mathrm{triv}$

- $V^{d_2} = \{0\}$, $G^{d_2} = T$, $G_{d_2} = T$, $W_{d_2} = W$,

  $k_{d_2} = \dfrac{(x_1 x_2)^g}{x_1 - x_2}$, $\quad \varepsilon_{V, d_2} = \mathrm{sign}$

$\cdot\ V^{d_3} = \{0\}$, $G^{d_3} = G$, $G_{d_3} = G$, $W_{d_3} = W$, $k_{d_3} = (x_1 x_2)^g$

$\varepsilon_{V,d_3} = \mathrm{sgn}$.

<u>Quelques calculs :</u>

$$\mathcal{P}_{d_0} = \bigoplus_{j=0}^{g-2} \mathbb{Q}\cdot (x_1+x_2)^j \subset H^*(V/G) \cong \mathbb{Q}[x_1+x_2, x_1x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_1} = \bigoplus_{j=0}^{g-1} \mathbb{Q}\cdot x_2^j \subset H^*(V^{d_1}/G^{d_1}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_2} = \mathbb{Q} \subset H^*(V^{d_2}/G^{d_2}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_3} = \{0\} \subset \mathbb{Q}[x_1+x_2, x_1x_2].$$

<u>isomorphisme d'intégralité</u>

$$\mathcal{P}_{d_0} \oplus \mathcal{P}_{d_1} \otimes \mathbb{Q}[x_1] \oplus \left(\mathcal{P}_{d_2} \otimes \mathbb{Q}[x_1,x_2]\right)^{\mathrm{sgn}} \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1+x_2, x_1x_2]$$

$$(f, g, h) \longmapsto f + \frac{x_1^g\, g(x_1,x_2) - x_2^g\, g(x_2,x_1)}{x_1-x_2} + 2(x_1x_2)^g\,\frac{h(x_1,x_2)}{x_1-x_2}$$

② $\mathbb{C}^* \curvearrowright V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k$

$$\lambda_0 : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad t \longmapsto 1$$

$$\lambda_1 : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad t \longmapsto t$$

$$\mathcal{P}_V = \{ \overline{\lambda_0}, \overline{\lambda_1} \}$$

$$V^{\lambda_0} = V, \quad G^{\lambda_0} = G, \quad G_{\lambda_0} = \{1\}, \quad k_{\lambda_0} = 1$$

$$V^{\lambda_1} = pt, \quad G^{\lambda_1} = G, \quad G_{\lambda_1} = G, \quad k_{\lambda_1} = \prod_{k>0} (kx)^{\dim V_k} \in \mathbb{Q}[x]$$

$$\mathrm{Ind}_{\lambda_1, \lambda_0} : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x], \quad f(x) \longmapsto \underbrace{k_{\lambda_1}}_{= C_V \cdot x^{\sum_{k>0} \dim V_k}} \cdot f(x).$$

$$P_{\lambda_0} = \mathbb{Q}[x]_{\deg < \sum_{k>0} \dim V_k}$$

$$P_{\lambda_1} = \mathbb{Q}$$

$$P_{\lambda_0} \oplus P_{\lambda_1} \otimes \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$$

$$(f, g) \longmapsto f + k_{\lambda_1} g.$$

6- Renforcements de l'isomorphisme d'intégralité

ⓐ Identifier P_d :

$$X_*(T)^{st} = \{ d \in X_*(T) \mid \bigcup G^d/G_d\text{-orbites fermées} \underset{\text{ouvert}}{\subset} V^d$$

+ stabilisateur fini.

<u>Conjecture</u> :

$$P_d \cong \begin{cases} IH^*(V^d /\!/ G^d) & \text{si } d \in X_*(T)^{st} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

→ Lorsque (G, V) provient d'un carquois symétrique, Meinhard-Reineke ~2014

→ $(G = \mathbb{C}^*, V)$ (H, 2024)

ⓑ Définir une version faisceautisée des P_λ.

$\pi_\lambda : V^\lambda/G^\lambda \longrightarrow V^\lambda/\!/G^\lambda \qquad d_\lambda = \dim V^\lambda - \dim G^\lambda$

$$\begin{tikzcd}
 & V^{\lambda\geq 0}/G^{\lambda\geq 0} \arrow[dl, "q_\lambda"'] \arrow[dr, "p_\lambda"] & \\
V^\lambda/G^\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & & V/G \arrow[d, "\pi"] \\
V^\lambda/\!/G^\lambda \arrow[rr, "\iota_\lambda"'] & & V/\!/G
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ind}_\lambda : \quad \iota_{\lambda *}\pi_{\lambda *}\mathbb{Q}_{V^\lambda/G^\lambda}[d_\lambda] \longrightarrow \pi_*\mathbb{Q}_{V/G}[d]$

Théorème (H, 2024)

Il existe des complexes constructible W_λ-équivariants $\mathcal{P}_\lambda$ sur $V^\lambda/\!/G^\lambda$ t.q.

$$\bigoplus_{\tilde\lambda \in \mathcal{P}_V/W} \left(\mathcal{P}_\lambda \otimes H^*_{G_\lambda}(pt)\right)^{\varepsilon_{V,\lambda}} \longrightarrow \pi_*\mathbb{Q}_{V/G}[d]$$

soit un isomorphisme.

Conjecture (renforcement de la version faisceautisée)

$$P_\lambda \cong \begin{cases} \mathcal{I}\mathcal{E}(V^\lambda /\!/ G^\lambda)[-\dim G_\lambda] & \text{si } \lambda \in X_*(T)^{st} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7- Historique

8. Construction des P_λ.