Positivité des polynômes cuspidaux

avec Ben Davison
Sebastian Schlegel Mejia

I. Algèbres de Kac-Moody généralisées

M monoïde, $(-,-) : M \times M \to \mathbb{Z}$ forme bilinéaire.

racines positives $R^+ = \{ m \in M \mid (m,m) \leq 2 \}$

racines simples primitives $\Sigma = \{ m \in R^+ \mid \forall\, m = \sum m_i,\ m_i \in R^+,\ 2-(m,m) > \sum_i (2-(m_i,m_i)) \}$

racines simples positives

$$\Phi^+ = \Sigma \cup \{ \ell m : m \in \Sigma,\ \ell \geq 1,\ (m,m) = 0 \}$$

$A = ((m,n))_{m,n \in \Phi^+}$ matrice de Cartan

Hypothèses $(m,n) \leq 0$ si $(m,m) = 2$

$\pi : I \to \Phi^+$; $\# \pi^{-1}(\{m\}) \leq 1$ si $(m,m) = 2$

I ensemble.

n^+ algèbre de Lie engendrée par e_i, $i \in I$, avec relations

$$\begin{cases} [e_i, e_j] = 0 & \text{si } (\pi(e_i), \pi(e_j)) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k+l = 1-(\pi(e_i),\pi(e_j))} \binom{1-(\pi(e_i),\pi(e_j))}{k} e_i^k e_j e_i^l & \text{si } (\pi(e_i), \pi(e_i)) = 2 \end{cases}$$

* $U(\mathfrak{n}^+)$ algèbre enveloppante.
  $\rightsquigarrow$ comprendre les relations en termes d'algèbre associative.

* $\mathfrak{n}^+, U(\mathfrak{n}^+)$ sont M-graduées

* Si I est $\mathbb{Z}$-gradué, $\mathfrak{n}^+, U(\mathfrak{n}^+)$ sont $M \times \mathbb{Z}$-graduées

$$P : \phi^+ \longrightarrow \mathbb{N}[t, t^{-1}]$$
$$m \longmapsto \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \# \pi^{-1}(m)[\ell]\, t^\ell.$$

autre façon de comprendre I.

Formule du caractère de Borcherds : $\mathrm{ch}\, \mathfrak{n}^+$

II - Fonctions cuspidales

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois

forme d'Euler : $\langle -,- \rangle_Q : \mathbb{N}^{Q_0} \times \mathbb{N}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$
$(d, e) \mapsto \sum_{i \in Q_0} d_i e_i - \sum_{i \to j \in Q_1} d_i e_j$.

$\mathbb{F}_q$ corps fini

$H_{Q,\mathbb{F}_q}$ algèbre de Hall de $Q/\mathbb{F}_q$ – algèbre de Hopf tordue.

représentations de dimension finie.

$$H_{Q,\mathbb{F}_q} = \mathrm{Fun}_{fin}\left(\mathrm{Rep}_Q(\mathbb{F}_q)/\sim \,, \mathbb{C}\right)$$

avec produit de convolution :

$$(f * g)([M]) = \sum_{R \subset M} q^{\frac{1}{2}\langle M/R, R\rangle_Q} f([M/R])\, g(R)$$

Coproduit défini de façon duale.

$$\Delta f([M], [N]) = \dots \sum_{M \to E \to N} f([E]) .$$

Fonctions cuspidales : $H^{cusp}_{Q,\mathbb{F}_q} = \left\{ f \in H_{Q,\mathbb{F}_q} \mid \Delta f = f \otimes 1 + 1 \otimes f \right\}$

Polynômes cuspidaux :

$$C_{Q,d}(q) = \dim_{\mathbb{C}} H^{cusp}_{Q,\mathbb{F}_q}[d].$$

* Si $\langle d, d\rangle_Q < 0$, c'est le bon objet. $C^{abs}_{Q,d} := C_{Q,d}$.
* Si $\langle d, d\rangle_Q = 0$, $C_{Q,d}(q) = 0 \Rightarrow C^{abs}_{Q,d}(q)$ polynôme,
  $C^{abs}_{Q,d}(q) = q$, connu depuis longtemps.

Bozec-Schiffmann : $C_{Q,d}(q) \in \mathbb{Z}[q]$.

<u>Conjecture</u> : — $\in \mathbb{N}[q]$.

<u>Polynômes de Kac</u> $d \in \mathbb{N}^{Q_0}$

$A_{Q,d}(q) = \# \{ \text{rep abs. indec de } Q \text{ sur } \mathbb{F}_q, \text{ de dim } d \} / \text{iso}$

$\in \mathbb{N}[q]$ Kac
Hausel-Letellier-Rodriguez-Villegas.

$M_{Q,d}(q) = \# \{ \text{rep de } Q \text{ sur } \mathbb{F}_q, \text{ dim } d \} / \sim$.

$$\mathrm{ch}\, H_{Q,\mathbb{F}_q} = \sum_{d \in \mathbb{N}^{Q_0}} M_{Q,d}(q) z^d = \mathrm{Exp}_{q,z}\left(\sum_d A_{Q,d}(q) z^d \right)$$

Krull-Schmidt
+
descente galoisienne pour les représentations de Q.

<u>Proposition</u> (Bozec-Schiffmann)

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Kac-Moody généralisée associée au monoïde $\mathbb{N}^{Q_0}$ avec forme bilinéaire induite par la forme d'Euler symétrisée $(\cdot,-)_Q$, avec caractère $\mathrm{ch}\,\mathfrak{g} = \sum_{d \in \mathbb{N}^{Q_0}} A_{Q,d}(q) z^d$, alors

$C^{abs}_{Q,d}(q)$ donne la multiplicité $\mathbb{Z}$-graduée de la racine d. En particulier, $C^{abs}_{Q,d}(q) \in \mathbb{N}[q]$.

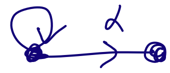
→ inversion itérative de la formule du caractère de Borcherds.

II – Algèbres de Hall cohomologiques

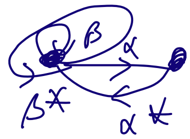
⇝ Comment obtenir une construction d'une telle algèbre de Lie ?

① preprojective algebras $\Rightarrow$ avec l'aide des algèbres de Hall cohomologiques (préprojectives)

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois



$\overline{Q}$ carquois double



Π_Q algèbre préprojective

$\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}\overline{Q}/\rho} \qquad \rho = [\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*]$

$\mathrm{Rep}\,\Pi_Q$ rep. de Π_Q, catégorie abélienne.

$$\mathfrak{M}_{\Pi_Q} = \bigsqcup_{d \in \mathbb{N}^{Q_0}} \mathfrak{M}_{\Pi_Q, d} \quad \text{champ des rep. de } \Pi_Q$$

$$\downarrow \mathrm{JH}$$

$$\mathcal{M}_{\Pi_Q} = \bigsqcup_{d \in \mathbb{N}^{Q_0}} \mathcal{M}_{\Pi_Q, d} \quad \text{bon espace de module}$$

$$X_{\overline{Q}, d} = \bigoplus_{i \xrightarrow{\alpha} j \in \overline{Q}_1} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{d_i}, \mathbb{C}^{d_j}) \circlearrowleft GL_d = \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i} .$$

$\cong T^* X_{Q,d}$ en utilisant la trace.

En termes explicites, $\mu_d : X_{\overline{Q}, d} \longrightarrow \mathfrak{gl}_d$ application moment

$$(x_\alpha, x_{\alpha^*})_{\alpha \in Q_1} \mapsto \sum_{\alpha \in Q_1} [x_\alpha, x_{\alpha^*}]$$

$$\mathfrak{M}_{\Pi_Q, d} = \mu_d^{-1}(0)/GL_d$$

$$\mathcal{M}_{\Pi_Q, d} = \mu_d^{-1}(0) /\!\!/ GL_d .$$

② Algèbres de Hall cohomologiques.

- Construire une structure d'algèbre sur

$$H_\bullet^{BM}(\mathfrak{M}_{\Pi_Q}).$$

- Mieux : construire une structure d'algèbre sur

décalage cohomologique

$$\mathtt{JH}_* \mathbb{D}\mathbb{Q}^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{M}_{\Pi_Q}} \in \mathcal{D}^+(\mathrm{MHM}(\mathcal{M}_{\Pi_Q})).$$

- Produit :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}xact_{\Pi_Q} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\
\mathfrak{M}_{\Pi_Q} \times \mathfrak{M}_{\Pi_Q} \arrow[d] & \circlearrowleft & \mathfrak{M}_{\Pi_Q} \arrow[d] \\
\mathcal{M}_{\Pi_Q} \times \mathcal{M}_{\Pi_Q} \arrow[rr, "\oplus"] & & \mathcal{M}_{\Pi_Q}
\end{tikzcd}$$

- L'algèbre BPS.

$\mathcal{A}_{\Pi_Q} := \mathtt{JH}_* \mathbb{D}\mathbb{Q}^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{M}_{\Pi_Q}} \in \mathcal{D}^+(\mathrm{MHM}(\mathcal{M}_{\Pi_Q}))$ est concentré en degrés cohomologiques ≥ 0.

* filtration perverse induite par JH ;

$$\mathcal{BPS}_{\Pi_Q, Alg} = \mathcal{H}^0(\mathcal{A}_{\Pi_Q}) \quad \text{algèbre BPS}$$

Avantage : $\mathcal{BPS}_{\Pi_Q, Alg}$ est un objet d'une catégorie abélienne.

$BPS_{\Pi_Q, Alg} = H^* \mathcal{BPS}_{\Pi_Q, Alg}$ algèbre BPS

Thm (DHS.) ① $\mathcal{BPS}_{\Pi_Q, Alg} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}_Q)$ où

$\mathfrak{n}_Q$ est une algèbre de Lie dans $(MHM(\mathcal{M}_{\Pi_Q}), \boxdot)$.

algèbre de Kac-Moody généralisée.

La structure monoïdale $\boxdot$ sur $MHM(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$ est donnée par

$\mathcal{F} \boxdot \mathcal{G} = \oplus_* (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$.

② $BPS_{\Pi_Q, Alg} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$ où $\mathfrak{n}^+$ est l'algèbre de Kac-Moody généralisée associée au monoïde $\mathbb{N}^{Q_0}$, muni de la forme d'Euler symétrisée