Le faisceau BPS pour les espaces de modules

repose en partie sur des travaux en commun avec Davison et Schlegel Mejia.

Séminaire Groupes, Algèbre, Géométrie,
Paris, 22 Mars 2024

0 Aperçu

Espaces de modules

bon espace de modules

Champs de modules

convolution

Algèbres de Hall cohomologiques (CoHA)

filtrations perverses

Faisceaux BPS

Structure d'algèbre associative/de Lie

théorie des bases canoniques/catégorification

Algèbres de Kac-Moody généralisées (KMG)

nombres de Betti,
représentations des KMG

Invariants énumératifs

Géométrie / topologie

Espaces de modules de faisceaux/fibrés sur

courbes C

surfaces S, T^*C

Calabi-Yau de dimension 3 X, $\mathrm{Tot}_C(\omega_C \oplus \mathcal{O}_C)$

$$\mathcal{M}$$

$$\uparrow$$

Champs de modules

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{JH} \mathcal{M}$$

$$\mathrm{CoHA} := H^{BM}_*(\mathfrak{M}) \supset \mathrm{BPS} = \mathcal{P}^{\leq 0} H^{BM}_*(\mathfrak{M})$$

$$\mathrm{KMG} : \begin{cases} \text{Matrice de Cartan} \\ \text{Générateurs de Chevalley} \end{cases}$$

Invariants énumératifs

Nombres de Betti

invariants de Donaldson-Thomas, ...

+ conjectures : intégralité,
indépendance vis-à-vis de certains paramètres discrets
Isomorphismes de Hodge non-abéliens pour les champs

① Espaces de modules :

Contexte général :

$\mathcal{E}$ catégorie abélienne

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{M}_{\mathcal{E}} & \text{champ algébrique des objets dans } \mathcal{E} \\ \downarrow{\scriptstyle JH} & \\ \mathcal{M}_{\mathcal{E}} & \text{le bon espace de modules} \end{array}$$

Souhait : étudier $IH^*(\mathcal{M}_{\mathcal{E}})$ via $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}$.

Un exemple venant de la géométrie

S surface projective lisse $/ \mathbb{C}$

H polarisation de S (fibré en droites)

$v \in H^*(S, \mathbb{Z})$ primitif : $\mathbb{Q}v \cap H^*(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}v$

$\mathcal{E} = \mathrm{Coh}^{H\text{-}ss}_{\mathbb{Z}v}(S)$ faisceaux cohérents semistables sur S avec vecteur de Mukai dans $\mathbb{Z}v$.

Schémas Quot : $$\begin{array}{ll} \mathfrak{M}_{\mathcal{E}} & \text{champ quotient} \\ \downarrow{\scriptstyle JH} & \\ \mathcal{M}_{\mathcal{E}} & \text{théorie géométrique des invariants.} \end{array}$$

Un exemple venant de la théorie des représentations

$$Q = (\underbrace{Q_0}_{\text{sommets}}, \underbrace{Q_1}_{\text{arêtes}}) \quad \text{carquois} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"] & 2 \end{tikzcd}$$

$$s, t : Q_1 \rightrightarrows Q_0 \quad \text{source et but}$$

représentations de carquois (sur $\mathbb{C}$) :

V_i $\mathbb{C}$ - espace vectoriel pour $i \in Q_0$

$V_{s(\alpha)} \xrightarrow{x_\alpha} V_{t(\alpha)}$ linéaire pour $\alpha \in Q_1$.

Vecteur dimension : $d = (d_i := \dim V_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$

Toutes les représentations de Q de vecteur dimension $d \in \mathbb{N}^{Q_0}$ sont encodées par

$$X_{Q,d} := \prod_{\alpha \in Q_1} \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{d_{s(\alpha)}}, \mathbb{C}^{d_{t(\alpha)}})$$

$$\circlearrowright$$

$$GL_d := \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i}$$

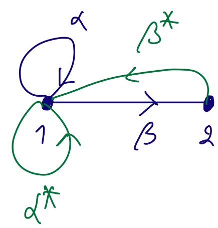
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{représentations de } Q \text{ de} \\ \text{vecteur dimension } d \end{array} \right\} \Big/ _{iso} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \begin{array}{l} \text{orbites de } GL_d \\ \text{dans } X_{Q,d} \end{array} .$$

Champ de représentations de Q de vecteur dimension d:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{Q,d} := \left[X_{Q,d} / GL_d \right] \arrow[d, "JH"'] \\ M_{Q,d} := \underset{GIT}{X_{Q,d} /\!/ GL_d} := \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[X_{Q,d}]^{GL_d} \right) \end{tikzcd}$$

L'exemple $\quad Q \rightsquigarrow \underset{\text{carquois double}}{\bar{Q}} = (Q_0, Q_1 \sqcup Q_1^*)$

$\alpha \qquad \alpha^*$ dans la direction opposée.



$\mathcal{C} =$ catégorie des représentations Q telles que $\displaystyle\sum_{\alpha \in Q_1} [x_\alpha, x_{\alpha^*}] = 0$

condition préprojective.

= condition symplectique.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}_{\mathcal{E}} \arrow[d, "JH"'] \\ M_{\mathcal{E}} \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}$ = champ algébrique $\underset{\text{fermé}}{\subset} \mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}}}$

$M_{\mathcal{E}}$ = bon espace de modules $\underset{\text{fermé}}{\subset} M_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

Un exemple venant de la topologie

$\mathcal{E}$ = systèmes locaux sur une surface de Riemann.

② Catégorie dérivée constructible

$\mathcal{M}$ schéma séparé de type fini / $\mathbb{C}$.

On utilise la même notation pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}(\mathbb{C})^{an}$

[seule la topologie nous importe]

$\mathcal{D}_c^+(\mathcal{M})$ = catégorie dérivée bornée inférieurement des faisceaux constructibles de $\mathbb{Q}$-ev sur $\mathcal{M}$

$$\begin{cases} \cdots 0 \to \mathcal{F}^m \cdots \to \mathcal{F}^{-1} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^2 \to \cdots \\ d \circ d = 0 \\ H^i(\mathcal{F}^\bullet) \text{ est un faisceau constructible sur } \mathcal{M}. \end{cases}$$

t-structure perverse

t-structures ⇝ trouver des catégories abéliennes à l'intérieur de catégories triangulées

⇝ permet de découper les objets.

Beilinson - Bernstein - Deligne - Gabber : t-structure perverse sur $\mathcal{D}_c^+(\mathcal{M})$.

t-structure : ${}^p\mathcal{D}_c^{\leq 0}, {}^p\mathcal{D}_c^{\geq 0}$ sous-catégories pleines

$$\mathcal{F}^\bullet \in {}^p\mathcal{D}_c^{\leq 0}(\mathcal{M}) \overset{\text{def}}{\iff} \dim\{x \in \mathcal{M} \mid H^i(i_x^*\mathcal{F}) \neq 0\} \leq -i$$

$$\mathcal{F}^\bullet \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(\mathcal{M}) \iff \dim\{x \in \mathcal{M} \mid H^i(i_x^!\mathcal{F}) \neq 0\} \leq -i.$$

Faisceaux pervers : $\mathrm{Perv}(\mathcal{M}) := \mathcal{D}_c^{\leq 0}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{D}_c^{\geq 0}(\mathcal{M})$

$\mathrm{Perv}(\mathcal{M})$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{catégorie abélienne : noyaux, conoyaux, ...} \\ \text{de longueur finie} \\ \text{description explicite des objets simples} \\ \quad [\text{complexes d'intersection}] \end{array} \right.$

Structures additionnelles

$\mathcal{M}$ monoïde dans la catégorie des schémas $/\mathbb{C}$,
avec composantes connexes séparées, de type fini,
une infinité !
structure monoïdale : produit cartésien

$$\mathcal{M} \times \mathcal{M} \xrightarrow{\oplus} \mathcal{M}.$$

exemple : $\mathcal{M} = \mathbb{N}$.

<u>Structure monoïdale</u> sur $\mathcal{D}^+_c(\mathcal{M})$:

$$\mathcal{F} \boxdot \mathcal{G} := \oplus_* (\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}) .$$

Si $\oplus$ est un morphisme fini,

$\oplus_*$ est pervers t-exact

et donc $\boxdot$ induit une structure monoïdale sur $\mathrm{Perv}(\mathcal{M})$.

$$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Perv}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{F} \boxdot \mathcal{G} \in \mathrm{Perv}(\mathcal{M}).$$

example fondamental : $\mathcal{E}$ catégorie abélienne

$\mathcal{M}_\mathcal{E}$ bon espace de modules de $\mathfrak{M}_\mathcal{E}$.

$\mathfrak{M}_\mathcal{E} \times \mathfrak{M}_\mathcal{E} \xrightarrow{\oplus} \mathfrak{M}_\mathcal{E}$ somme directe d'objets dans $\mathcal{E}$

induit $\mathcal{M}_\mathcal{E} \times \mathcal{M}_\mathcal{E} \xrightarrow{\oplus} \mathcal{M}_\mathcal{E}$ somme directe d'objets semistables.

③ Le faisceau BPS

$\mathcal{E}$ catégorie abélienne.

$$\underset{\text{champ}}{\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}} \xrightarrow{JH} \underset{\text{bon espace de modules}}{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}}$$

But : (A) construire $\mathcal{BPS}_{Lie} \in \mathrm{Perv}(\mathcal{M})$ satisfaisant :

① $\mathcal{BPS}_{Lie}$ est semisimple

② $\underset{\text{composante connexe}}{\mathcal{M}_a \subset \mathcal{M}}$. $\quad \mathcal{IC}(\mathcal{M}_a) \overset{\oplus}{\subseteq} \mathcal{BPS}_{Lie}$

si $\mathcal{M}_a$ paramètre des objets simples de $\mathcal{E}$.

③ $\mathcal{BPS}_{Lie}$ est une algèbre de Lie dans la catégorie monoïdale symétrique $(\mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}), \boxdot)$.

④ $$\mathrm{Sym}\left(\mathcal{BPS}_{Lie} \otimes H^*(B\mathbb{C}^*)\right) \cong \underbrace{JH_* \mathbb{D}\mathbb{Q}^{vir}_{\mathfrak{M}}}_{A} \in \mathcal{D}^+_c(\mathcal{M})$$

reconstruction de $H^{BM}_*(\mathfrak{M})$.

(B) Identifier la structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{BPS}_{Lie}$ et $H^*(\mathcal{BPS}_{Lie})$

(A) filtrations perverses.

* On va construire $\mathcal{BPS}_{\mathrm{Lie}}$ à partir de

$$\mathcal{BPS}_{\mathrm{Alg}} := {}^{p}\mathcal{H}^{0}(\mathcal{A}) \in \mathrm{Perv}(\mathcal{M})$$

* La structure d'algèbre vient de la structure d'algèbre de Hall cohomologique sur $\mathcal{A}$

(B) * Utilisation du théorème de formalité pour les catégories Calabi-Yau de dimension 2

* Étude de la situation combinatoire venant des carquois.

(A) et (B) sont reliés :

Définition $\mathcal{BPS}_{\mathrm{Alg}}$

Description : $\mathcal{BPS}_{\mathrm{Alg}}$

Définition : $\mathcal{BPS}_{\mathrm{Lie}}$ points (1), (2), (3) satisfaits par définition

point (4) : conjecture d'intégralité cohomologique.

(A) Algèbre de Hall cohomologique

$\mathcal{E}$ catégorie abélienne

$$
\begin{tikzcd}
(N,M) & & 0 \to M \to E \to N \to 0 \arrow[ll, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & E \\
& & \mathfrak{Exact}_{\mathcal{E}} \arrow[dll, "q"'] \arrow[drr, "p"] & & \\
\mathfrak{M}_{\mathcal{E}} \times \mathfrak{M}_{\mathcal{E}} \arrow[d, "JH"'] & & & & \mathfrak{M}_{\mathcal{E}} \arrow[d, "JH"] \\
\mathcal{M}_{\mathcal{E}} \times \mathcal{M}_{\mathcal{E}} \arrow[rrrr, "\oplus"'] & & & & \mathcal{M}_{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}
$$

Théorie des déformations : chaque composante connexe $\mathfrak{M}_{\mathcal{E},a}$ de $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}$ a une dimension virtuelle vir_a.

$p_* q^*$ induit une structure d'algèbre associative sur

$$\mathcal{A} := JH_* \mathbb{DQ}^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{M}} \in \left(\mathcal{D}^+_c(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}), \boxdot\right)$$

c'est-à-dire un morphisme

$$m : \mathcal{A} \boxdot \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

Algèbre BPS associative :

$$BPS_{Alg} := {}^{p}\mathcal{H}^{0}(\mathcal{A}) \in \left(\mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}}), \boxdot\right)$$

structure d'algèbre associative induite

Démonstration :

$\mathcal{A} \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(\mathcal{M})$, donc ${}^p\mathcal{H}^0(\mathcal{A}) = {}^p\tau_{\leq 0}\mathcal{A}$

$\oplus$ est un morphisme fini, donc $\oplus_*$ est pervers t-exact,

donc ${}^p\tau_{\leq 0}(\mathcal{A} \boxdot \mathcal{A}) \cong \oplus_* {}^p\tau_{\leq 0}(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A}) \cong \oplus_*({}^p\tau_{\leq 0}\mathcal{A}) \boxtimes ({}^p\tau_{\leq 0}\mathcal{A})$

d'où ${}^p\tau_{\leq 0}(m) : {}^p\mathcal{H}^0(\mathcal{A}) \boxdot {}^p\mathcal{H}^0(\mathcal{A}) \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0(\mathcal{A})$ ∎

(B) **Théorème** (Davison-H.- Schlegel Mejia)
2023

$$\mathcal{BPS}_{\mathrm{Alg}} \cong U(\mathfrak{n}^+)$$ algèbre enveloppante

où $\mathfrak{n}^+ \in (\mathrm{Perv}(\mathcal{M}), \boxdot)$ est une algèbre de Lie définie par générateurs et relations :

générateurs : $\mathcal{IC}(\mathcal{M}_a)$ pour $\mathcal{M}_a \subset \mathcal{M}$ composante connexe paramétrant des objets simples de $\mathcal{E}$

$\oplus^{\ell}_{*} \mathcal{IC}(\mathcal{M}_a)$ $\quad \oplus^{\ell} : \mathcal{M}_a \longrightarrow \mathcal{M}_{\ell a}$, $x \longmapsto x^{\oplus \ell}$

pour $\mathcal{M}_a$ comme ci-dessus, où en plus, $\mathfrak{M}_a$ est de dimension virtuelle 0.

Relations : relations de Serre déterminées par la matrice de Cartan infinie

$$A := \left(\frac{\mathrm{vir}(a+b) - \mathrm{vir}(a) - \mathrm{vir}(b)}{2}\right)_{a, b \in \pi_0(\mathfrak{M})}$$

$\mathfrak{n}^+$ est une version faisceautique d'une algèbre de Kac-Moody généralisée (au sens de Borcherds)

(A) **Définition** : $BPS_{Lie} := \mathfrak{n}^+ \in (\mathrm{Perv}(\mathcal{M}), \boxdot)$ algèbre de Lie.

(A4) **Théorème** (Davison - H. - Schlegel Mejia) Intégralité cohomologique
2023

isomorphisme PBW

$$\mathrm{Sym}\left(BPS_{Lie} \otimes H^*(B\mathbb{C}^*)\right) \cong \mathcal{A}.$$

④ Exemples

ⓐ Géométrie

C courbe projective lisse, $\theta \in \mathbb{Q}$

$\mathcal{E}$ = catégorie des fibrés de Higgs semistables de pente θ fixée sur C

fibrés de Higgs : $(\mathcal{F}, \xi)$ $\quad$ $\mathcal{F}$ faisceau cohérent sur C

$\xi : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes \Omega^1_C$ $\quad$ $\mathcal{O}_C$-linéaire

pente : $\mu(\mathcal{F}) = \dfrac{\deg \mathcal{F}}{\operatorname{rk} \mathcal{F}}$

semistabilité : $\forall \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tel que $\xi(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G} \otimes \Omega^1_C$,

$$\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{F})$$

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{M}_\theta & = & \text{champ} \\ \downarrow{\scriptstyle JH} & & \\ \mathcal{M}_\theta & = & \text{espace de modules} \end{array}$$

$$\mathcal{BPS}_{\theta, \mathrm{Alg}} := \mathcal{BPS}_{\mathcal{E}, \mathrm{Alg}}$$

$$\mathcal{BPS}_{\theta, \mathrm{Lie}} := \mathcal{BPS}_{\mathcal{E}, \mathrm{Lie}}$$

Corollaire : genre de $C \geq 2$

$BPS_{\theta, Alg}$ est l'algèbre libre engendrée par

$IE(\mathcal{M}_{d/r})$, $d \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ tels que $d/r = \theta$

$BPS_{\theta, \cancel{Alg}\, Lie}$ est l'algèbre (de Lie) libre engendrée par

$IE(\mathcal{M}_{d/r})$, $d \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ tels que $d/r = \theta$

Si $(r, d) = 1$, $BPS_{r,d,Lie} = IE(\mathcal{M}_{r,d})$

$= \mathbb{Q}_{\mathcal{M}_{r,d}}[\dim \mathcal{M}_{r,d}]$

Théorème (Kinjo – Koseki)

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}_{r,d} \\ \downarrow h \\ B_r = \prod_{i=0}^{r-1} H^*(C, \Omega_C^{\otimes i}) \cong \mathbb{A}^N \text{ espace affine} \end{array}$$

$h_* BPS_{r,d,Lie} \in \mathcal{D}_c^+(B_r)$ ne dépend pas de $d \in \mathbb{Z}$

Conséquence : Pour étudier les supports de la fibrations de Hitchin : décomposition de $h_* \mathbb{Q}_{\mathcal{M}_{r,d}}$ $(r,d)=1$, il est efficace de travailler avec $BPS_{r,0}$.

Corollaire (DHS, 2023)

$$h_* \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{r,d}) \in \mathcal{D}_c^+(B_r)$$ ne dépend de (r,d) que via $\mathrm{pgcd}(r,d)$.

Corollaire (Mauri-Migliorini-Pagaria, DHS)

Rafinement des théorèmes de support pour la fibration de Hitchin

$$h_* \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{r,0})\big|_{B_r^{red}}$$ a un support plein

(b) Géométrie - topologie

$\mathcal{E} = \mathrm{Higgs}_0^{sst}(C)$ pente $\theta = 0$

$\mathcal{E}' = \mathrm{rep}\ \pi_1(C, x)$ systèmes locaux sur C

Théorie de Hodge non-abélienne

$\forall r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}^{\mathrm{Higgs}}_{r,0} & \triangle & \mathfrak{M}_{r,\mathcal{E}'} \\ \downarrow \mathrm{JH} & & \downarrow \\ \mathcal{M}^{\mathrm{Higgs}}_{r,0} & \overset{\varphi}{\simeq} & \mathcal{M}_{r,\mathcal{E}'} \end{array}$$

$\mathcal{M}_{r,\mathcal{E}'}$ = variété de caractère pour C.

homéomorphisme

$\mathcal{M}^{\mathrm{Higgs}}_{r,0} = \mathcal{M}^{\mathrm{Dol}}_r$, $\quad \mathcal{M}_{r,\mathcal{E}'} = \mathcal{M}^{\mathrm{Betti}}_r$

$$\mathcal{M}^{\mathrm{Dol}} = \bigsqcup_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{M}^{\mathrm{Dol}}_r$$

$$\mathcal{M}^{\mathrm{Betti}} = \bigsqcup_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{M}^{\mathrm{Betti}}_r$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^{\mathrm{Dol}} \times \mathcal{M}^{\mathrm{Dol}} \arrow[r, "\oplus"] \arrow[d, "\wr", "\text{homéo}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{M}^{\mathrm{Dol}} \arrow[d, "\wr"', "\text{homéo}"] \\ \mathcal{M}^{\mathrm{Betti}} \times \mathcal{M}^{\mathrm{Betti}} \arrow[r, "\oplus"'] & \mathcal{M}^{\mathrm{Betti}} \end{tikzcd}$$

Théorème (DHS) 2022 Isomorphisme de Hodge non-abélien pour les champs

$$\Psi_* \mathrm{JH}_* \mathbb{D}\mathcal{Q}^{vir}_{\mathfrak{M}^{\mathrm{Higgs}}} \simeq \mathrm{JH}_* \mathbb{D}\mathcal{Q}^{vir}_{\mathfrak{M}_{\mathcal{E}'}}$$

$$\in \mathcal{D}^+_c(\mathcal{M}^{\mathrm{Betti}})$$

En considérant les sections globales, on trouve

$$H_*^{BM}(\mathfrak{M}^{Higgs}) \cong H_*^{BM}(\mathfrak{M}^{Betti})$$

Théorème (H) $_{2023}$: C'est un isomorphisme d'algèbres (pour les structures respectives d'algèbres de Hall cohomologiques)

Démonstration :

On ajoute le champ et espace de de Rham :

$$\mathcal{M}^{Dol} \cong \underbrace{\mathcal{M}^{dR} \cong \mathcal{M}^{Betti}}$$

se relève en une équivalence de champs analytiques $\mathfrak{M}^{dR} \cong \mathfrak{M}^{Betti}$ (Porta, Simpson)

$$\Rightarrow H^*(\mathcal{A}^{dR}) \underset{\text{algèbres}}{\cong} H^*(\mathcal{A}^{Betti})$$

$\mathcal{M}^{Dol} \cong \mathcal{M}^{dR}$ sont reliés par l'espace de λ-connections

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}^{dR} & \rightarrow & \mathcal{M}^{Hodg} & \leftarrow & \mathcal{M}^{Dol} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \in & \mathbb{A}^1 & \ni & 0 \end{array}$$

∎

(b) Théorie des représentations

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois

$\bar{Q} = (Q_0, Q_1 \sqcup Q_1^*)$ carquois double.

$\mathbb{C}\bar{Q} \ni \rho = \sum_{\alpha \in Q_1} [\alpha, \alpha^*]$ $\qquad \Pi_Q = \mathbb{C}\bar{Q} / \langle\langle \rho \rangle\rangle$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{M}_{\Pi_Q} \\ {\scriptstyle JH}\big\downarrow \\ \mathcal{M}_{\Pi_Q} \end{array}$$

morphisme de Jordan-Hölder ou de semisimplification.

Théorème (DHS)

$H^*(\mathcal{BPS}_{\Pi_Q, Alg}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$ où

$\mathfrak{n}^+$ est la partie positive d'une alg. de Kac-Moody généralisée $\mathfrak{g}$.

Théorème (DHS) Décomposition de

$H^*(\mathcal{M}(f,d))$ variété de Nakajima

vecteur d'encadrement $f \in \mathbb{N}^{Q_0}$

en tant que représentation de $\mathfrak{g}$.

Anticipation : Géométrie énumérative des * surfaces K3, Abéliennes

* composantes de Kuznetsov de variétés de dimension 3.

* systématisation de l'étude des espaces de modules via la théorie des représentations.