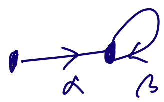
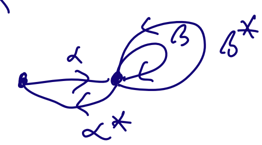
Algèbres de Hall cohomologiques
Théorie de Hodge non-abélienne champêtre
Positivité des polynômes cuspidaux.

catégories 2CY

① $Q = (Q_0, Q_1)$ carquois $\longrightarrow$ $\overline{Q}$ = double de Q $\longrightarrow$ Rep Π_Q





$$\rho = [\alpha, \alpha^*] + [\beta, \beta^*]$$

$$\Pi_Q = \mathbb{C}\overline{Q}/\rho$$

"algèbre préprojective"

② C courbe projective lisse genre g $\longrightarrow$ T^*C surface symplectique $\longrightarrow$ $\mathrm{Coh}_c(T^*C)$

③ S surface de Riemann genre g $(g \geq 1)$ $\longrightarrow$ $\mathbb{C}[\pi_1(S)]$ ou déformations $\longrightarrow$ Rep $\pi_1(S)$

homological dimension 2

catégorie dg associée est 2CY.

* geom. rep th
* quantum groups
* Nakajima quiver varieties

* Théorie de Hodge non-abélienne
* Conjectures $P = W$.
* géométrie énumérative des surfaces K3 abéliennes

$\theta \in \mathbb{Q}$

① $\mathfrak{M}_{\Pi_Q} = \bigsqcup_d \{ \xi_{\rho_d} = 0 \} / GL_d$ $\xrightarrow{JH}$ $\mathcal{M}_{\Pi_Q} \bigsqcup_d \{ \xi_{\rho_d} = 0 \} /\!/ GL_d$

② $\mathfrak{M}_\theta^{Dol}(C) \longrightarrow \mathcal{M}^{Dol}(C)$

③ $\mathfrak{M}^{Betti}(S) \longrightarrow \mathcal{M}^{Betti}(S)$

$d \in \mathbb{N}^{Q_0}$

$X_{\overline{Q},d} = \bigoplus_{i \xrightarrow{\alpha} j \in \overline{Q}_1} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{d_i}, \mathbb{C}^{d_j})$

$\rho_d : X_{\overline{Q},d} \to \mathfrak{gl}_d$

$\mathfrak{M}^{Dol}_{r,d}(C)$ champ des fibrés de Higgs semistables, rang r et degré d

canonical bundle

- $\mathcal{F} \xrightarrow{\xi} \mathcal{F} \otimes K_C$ $\mathcal{O}_X$-lin
- $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\xi(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$ $\Rightarrow \dfrac{\deg(\mathcal{G})}{rk(\mathcal{G})} \leq \dfrac{\deg(\mathcal{F})}{rk(\mathcal{F})}$.

$\pi_1(S) = \langle x_i, y_i \ 1 \leq i \leq g \ \ \prod_{i=1} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} = 1 \rangle$

ou $\lambda \in \mathbb{C}^*$ pour def.

$1 = t$

$\mathfrak{M}_r^{Betti} = \{ t = 1 \} \big/ GL_r$

$\{ t = 1 \} \subset (GL_r)^{2g} \big/ GL_r \text{ diag.}$

Écrivons $\mathfrak{M} \xrightarrow{JH} \mathcal{M}$, pour désigner l'une des situations ci-dessus.

$\mathcal{A}$ pour la catégorie abélienne considérée

$= \mathrm{Rep}\, \Pi_Q$

$\mathrm{Higgs}^{ss}(C)$

$\mathrm{Rep}\, \pi_1(S)$

En fait, on peut prendre pour $\mathcal{A}$ des catégories beaucoup plus générales.

$\mathcal{F} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathcal{F}_i^{\oplus m_i}$ objet semisimple de $\mathcal{A}$.

$\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r\}$

carquois Ext : $(\overline{Q}_{\underline{\mathcal{F}}})_0 = \underline{\mathcal{F}}$

$\dim \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j)$ flèches $\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_j$

$\overline{Q}_{\underline{\mathcal{F}}}$ encode toutes les informations de la sous-catégories de Serre engendrée par $\mathcal{A}$ (symétrie de la forme d'Euler)

$\overline{Q}_{\underline{\mathcal{F}}}$ est le double d'un carquois $Q_{\underline{\mathcal{F}}}$.

vecteur dimension $(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^{\underline{\mathcal{F}}}$.

Outil principal pour comprendre ces champs.

Théorème du voisinage (Davison)

$x \in \mathcal{M}$ correspond à un objet semisimple $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{F} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{F}_i^{\oplus m_i}$

GL_m groupe d'automorphismes de $\mathcal{F}$.

$\exists$ a finite type affine scheme U with GL_m-action and a commutative diagram of Cartesian squares and étale horizontal maps.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{\Pi Q_{\mathcal{E}}, m} \arrow[d, "JH"'] & U/Gl_m \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \mathcal{M} \arrow[d, "JH"] \\
M_{\Pi Q_{\mathcal{E}}, m} & U/\!/Gl_m \arrow[l] \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

Fait supplémentaire (donné par la démonstration du théorème du voisinage)

Complexe RHom

Complexe à 3 termes sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, tq pour x, y $\mathbb{C}$-points de $\mathcal{M}$ correspondants à des objets $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}(x,y)$ calcule $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

$x, y \in M$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \times \mathcal{M} \arrow[d] & p^{-1}((x,y)) \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "b"] \arrow[d] & \mathcal{M}_{\Pi Q_{\mathcal{F}}} \times \mathcal{M}_{\Pi Q_{\mathcal{F}}} \arrow[d] \\
M \times M & \{(x,y)\} \arrow[l, hook'] \arrow[r] & M_{\Pi Q_{\mathcal{E}}} \times M_{\Pi Q_{\mathcal{F}}}
\end{tikzcd}$$

$$a^* \mathcal{C} \simeq b^* \mathcal{C}_{\Pi Q_{\mathcal{F}}} \in D_{coh}(p^{-1}(x,y))$$

Algèbres de Hall cohomologiques

décalage cohomologique

$$\mathcal{A} = JH_* \mathbb{D}\mathbb{Q}^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{M}} \in \mathcal{D}^+_c(\mathcal{M}) \quad \text{complexe cstble}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}xact_{\mathcal{A}} = t_0(\mathrm{Tot}(\mathcal{E})) \arrow[dl, "q"', "\text{virtually lisse}"] \arrow[dr, "p", "\text{propre}"'] & \\
\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} & & \mathfrak{M}
\end{tikzcd}$$

$p_* q^*$ muni $\quad m : \underbrace{\oplus_*(\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A})}_{= \mathcal{A} \boxdot \mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$

d'une structure d'algèbre associative.

$\mathcal{A}$ est concentré en degrés pervers ≥ 0

$${}^pH^i(\mathcal{A}) = 0 \quad \text{si} \quad i < 0.$$

$\Rightarrow \big(\underbrace{{}^pH^0(\mathcal{A})}_{= \mathcal{BPS}_{\mathcal{A},\mathrm{Alg}}}, {}^pH^0(m)\big)$ est une algèbre dans la catégorie tensorielle $\mathrm{Perv}(\mathcal{M})$.

algèbre BPS

secrètement, algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie catégories totalement négative :

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G})_{\mathcal{A}} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$ forme d'Euler

tot. neg : < 0 si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \neq 0$.

(1) $\mathrm{Rep}\, \Pi_Q$ $\quad (\underset{d}{\mathcal{F}}, \underset{e}{\mathcal{G}}) = \sum_i 2(1-g_i) d_i e_i - \sum_{i \xrightarrow{\alpha} j \in \overline{Q}_1} d_i e_j$

(2) $\mathrm{Higgs}_{\theta}(C)$ $\quad (\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 2(1-g)\, rk(\mathcal{F})\, rk(\mathcal{G})$

(3) $\mathrm{Rep}\, \pi_1(S)$ $\quad (\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 2(1-g) \dim(\mathcal{F}) \dim(\mathcal{G})$

$(-,-)_{\mathcal{A}}$ induit une forme bilinéaire

$$\pi_0(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) \times \pi_0(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

STRUCTURE monoidale sur $\mathrm{Perv}(\mathcal{M})$, $D^b_c(\mathcal{M})$.

Théorème (DHS)

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne 2CY totalement négative.

$R^+_{\mathcal{A}} = \{ a \in \pi_0(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) \mid (a,a) \leq 2 \}$ racines positives

$\Sigma_{\mathcal{A}} = \{ a \in \pi_0(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) \mid \forall\, a = \sum_{i=1}^r a_i,\ 2-(a,a) > \sum_{i=1}^r (2-(a_i,a_i)) \}$

racines positives primitives.

(1) Le morphisme naturel

$$\mathrm{Free}_{\boxdot\text{-}\mathrm{Alg}}\left(\bigoplus_{a\in\Sigma_{\mathcal{A}}} \mathcal{IE}(\mathcal{M}_a)\right) \longrightarrow \mathcal{BPS}_{\mathcal{A},\mathrm{Alg}}$$

est un isomorphisme d'algèbres

isomorphisme PBW

(2) Le morphisme naturel

$$\mathrm{Sym}_{\boxdot}\left(\mathcal{BPS}_{\boxdot,\mathrm{Lie}} \otimes H^{*}_{\mathbb{C}^*}\right) \to \mathcal{A}$$

est un isomorphisme (de complexes constructibles).

Interlude : Algèbre BPS strictement seminilpotente de degré 0.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}^{\mathrm{SSN}}_{\Pi_Q} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathfrak{M}_{\Pi_Q} \arrow[d] \\ \mathcal{M}^{\mathrm{SSN}}_{\Pi_Q} \arrow[r] & \mathcal{M}_{\Pi_Q} \end{tikzcd}$$

Sous-monoïde de $\mathcal{M}_{\Pi_Q}$ formé des représentations semisimples de Π_Q dont seules les flèches $\alpha \in Q_1 \subset \overline{Q}_1 = Q_1 \cup Q_1^{op}$ agissent possiblement de façon non triviale.

$\mathcal{A}^*_{\Pi_Q, SSN} := H^{BM}_*\left(\mathcal{M}^{SSN}_{\Pi_Q}, \mathbb{Q}^{vir}\right)$ a la structure d'algèbre induite

$\mathcal{A}^0_{\Pi_Q, SSN}$ est engendré comme $\mathbb{Q}$-ev par les classes fondamentales des composantes irréductibles de $\mathcal{M}^{SSN}_{\Pi_Q}$.
[$\mathcal{M}^{SSN}_{\Pi_Q}$ est equidimensionnel]

Algèbre de Kac-Moody généralisée du carquois (partie positive)

$Q = (Q_0, Q_1)$ $\qquad Q_0 = \underbrace{Q_0^{re}}_{\text{sommets sans boucles}} \sqcup \underbrace{Q_0^{im}}_{\text{sommets avec au moins une boucle}}$

$I_\infty = (Q_0^{re} \times \{1\}) \sqcup (Q_0^{im} \times \mathbb{Z}_{\geq 1})$ racines simple positives

n_Q^+ algèbre de Lie engendrée par e_i, $i \in I_\infty$, avec les relations

* $[e_i, e_j] = 0$ si $(i, j) = 0$

* $\mathrm{ad}(e_i)^{1-(i,j)}(e_j) = 0$ si $i \in Q_0^{re} \times \{1\}$.

Théorème: [folklore, H] $\exists$ un morphisme d'algèbres

$$U(n_Q^+) \to \mathcal{A}^0_{\Pi_Q, SSN}$$
$$e_{(i,n)} \mapsto [\Lambda_{i,n}]$$

une certaine composante irréductible de $\mathcal{M}^{SSN}_{\Pi_Q}$

C'est un isomorphisme.

En particulier, si Q est totalement négatif, il n'y a pas de relations.

$U(n_Q^+)$ est une algèbre libre engendrée par e_i,

$i \in Q_0 \times \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Applications

Isomorphisme de Hodge non-abélien champêtre

théorie de Hodge non-abélienne :

homéomorphisme

$$\Psi_{r,d} : \mathcal{M}^{Dol}_{r,d}(C) \simeq \mathcal{M}^{Betti}_{g,r,d}$$

- Morphisme de monoïdes.

$$\coprod_{d/r=\theta} \mathcal{M}^{Dol}_{r,d}(C) \simeq \coprod_{d/r=\theta} \mathcal{M}^{Betti}_{g,r,d}$$

Comme morphisme de monoïde dans Top.

↳ structure donnée par $\oplus$

- $\Psi_{r,d}^{*}\mathcal{IC}(\mathcal{M}_{g,r,d}^{\text{Betti}}) \simeq \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{r,d}^{\text{Dol}}(C))$ le complexe d'intersection est un invariant topologique
- $\Psi_{r,d}^{*} : \mathcal{D}_c^{+}(\mathcal{M}_{g,r,d}^{\text{Betti}}) \to \mathcal{D}_c^{+}(\mathcal{M}_{r,d}^{\text{Dol}}(C))$ foncteur symétrique monoïdal

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Sym}\left(\bigoplus_{d/r=\theta} \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{g,r,d}^{\text{Betti}}) \otimes H^{*}_{\mathbb{C}^*}\right) \simeq \mathrm{Sym}\left(\bigoplus_{d/r=\theta} \mathcal{IC}(\mathcal{M}_{r,d}^{\text{Dol}}(C)) \otimes H^{*}_{\mathbb{C}^*}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_{*}^{BM}(\mathfrak{M}_{g,r,d}^{\text{Betti}}, \mathbb{Q}) \simeq H_{*}^{BM}(\mathfrak{M}_{r,d}^{\text{Dol}}(C)) \quad \forall r, d.}$$

- $P = W$: Maulik - Shen, Hausel Mellit Minets Schiffmann $\Rightarrow$ $\Psi_{r,d}^{*}\,\mathcal{BPS}_{g,r,d}^{\text{Betti}} \simeq \mathcal{BPS}_{C,r,d}^{\text{Dol}}$ as perverse sheaves on $\mathcal{M}_{r,d}^{\text{Dol}}(C)$.

- $SP = SW \Leftrightarrow IP = IW \Leftrightarrow \chi$-independence pour l'espace de module de Betti.

- NAH iso en rangs 0, 1 : Davison 2021.
champêtre

- ((NAH iso dans le cas parabolique ?))

Positivité des polynômes cuspidaux

Q carquois

$d \in \mathbb{N}^{Q_0}$ $\quad A_{Q,d}(q)$ polynôme de Kac

$= \#$ représentations absolument indécomposables de Q sur $\mathbb{F}_q$, de vecteur dimension d

Q totalement négatif.

$H_{Q,\mathbb{F}_q}$ algèbre de Hall constructible de Q sur $\mathbb{F}_q$.

coproduit Δ

$$H_{Q,\mathbb{F}_q}^{cusp} = \{ f \in H_{Q,\mathbb{F}_q} \mid \Delta f = f \otimes 1 + 1 \otimes f \}.$$

<u>thm</u> (Bozec-Schiffmann) • $C_{Q,d}(q) := \dim H_{Q,\mathbb{F}_q}^{cusp}[d] \in \mathbb{Z}[q]$

• Si $\exists$ algèbre de Lie libre $\underbrace{\text{avec caractère}}_{\mathbb{N}^{Q_0} \times \mathbb{Z}\text{-graduée}}$ $\sum_{d \in \mathbb{N}^{Q_0}} A_{Q,d}(q) z^d$, $\mathfrak{g}_Q^{\mathbb{Z}}$

alors $\displaystyle\sum_d C_{Q,d}(q) z^d = \mathrm{ch}\left(\mathfrak{g}_Q^{\mathbb{Z}} / [\mathfrak{g}_Q^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{g}_Q^{\mathbb{Z}}] \right).$

in particular $C_{Q,d}(q) \in \mathbb{N}[q]$.

* BPS_{Π_Q} algèbre de Lie libre $\mathbb{N}^{Q_0} \times \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{degré cohomologique}}$-graduée.

* $\mathrm{ch}\, \mathrm{BPS}_{\Pi_Q} = \displaystyle\sum_{d \in \mathbb{N}^{Q_0}} A_{Q,d}(q^{-2}) z^d$. (Davison) "less perverse..."

Démonstration : procédure inductive

$\boxed{1}$ $$\mathrm{Free}\left(\bigoplus_{a\in\Sigma_{\mathcal{A}}} \mathcal{IE}(\mathcal{M}_a)\right) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}}} \mathcal{BPS}_{\mathcal{A},\mathrm{Alg}}$$

est un morphisme entre faisceaux pervers semisimples sur $\mathcal{M}$.

$\mathcal{H} \underset{\text{simple}}{\subset} \mathrm{Ker}\,\Phi \oplus \mathrm{coker}\,\Phi$

$x \in \mathcal{M}$ s.t. $i_x^! \mathcal{H} \neq 0$.

x correspond à $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{F}_i^{m_i}$ semisimple de $\mathcal{A}$.

Q t.q. $\overline{Q}$ est le carquois Ext de $\underline{\mathcal{F}}$

Théorème du voisinage + comparaison des complexes à 3 termes $\Rightarrow$ Φ_{Π_Q} n'est pas un isomorphisme.

$\rightarrow$ le cas de $\mathcal{A}$ arbitraire se ramène au cas de Q arbitraire

$\rightarrow$ $\mathcal{A}$ tot neg $\Rightarrow$ Q tot neg

$\rightarrow$ Cette opération réalisée pour $\mathcal{A} = \mathrm{Rep}\,\Pi_Q$ donne un procédé inductif, une récurrence sur les paires $\left(|d|, -|\{i\in Q_0 \mid d_i \neq 0\}|\right)$.

$\rightarrow$ le cas terminal est résolu grâce à $H^0\left(\mathcal{A}_{\Pi_Q}^{\mathrm{SSN}}\right)$

$\boxed{2}$ Comparaison avec le théorème d'intégrité cohomologique pour Π_Q. (PBW)

Construction du morphisme PBW

$$\underbrace{\mathrm{Free}_{\square\text{-Lie}}\left(\bigoplus_{a\in\Sigma_{\mathcal{A}}} \mathcal{IE}(\mathcal{M}_a)\right)}_{=:\ \mathrm{Free}_{\square\text{-Lie}}(\mathcal{A})} \hookrightarrow \mathcal{BPS}_{\mathcal{A},\mathrm{Alg}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{BPS}_{\mathcal{A},\mathrm{Alg}} \arrow[d, "\text{adjonction}"] \\ \mathcal{A} \end{tikzcd} \qquad (P_{\tau_{\leq 0}} \to \mathrm{id})$$

$H^*_{\mathbb{C}^*}(pt) \circlearrowright \mathcal{A}$

donne

$$\mathrm{Free}_{\square\text{-Lie}}(\mathcal{A}) \otimes H^*_{\mathbb{C}^*}(pt) \to \mathcal{A}$$

- coha multiplication itérée :

$$\Phi_{\mathcal{A}} : \mathrm{Sym}\left(\mathrm{Free}_{\square\text{-Lie}}(\mathcal{A}) \otimes H^*_{\mathbb{C}^*}(pt)\right) \to \mathcal{A}.$$