

- 1 - Situation
- 2 - Contexte et motivation
- 3 - Opérations
- 4 - Théorème d'intégralité
- 5 - Exemples
- 6 - Renforcements
- 7 - Historique
- 8 - Construction des P_i .

Intégralité cohomologique pour les représentations des groupes réductifs.

tout élément agit
de façon unipotente sur
toutes les repr.

sous groupe unipotent
comme normal max

On travaille sur $\mathbb{C}$.

1 - Situation

$$G = GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C}), (\mathbb{C}^*)^N, Sp_n(\mathbb{C}), \dots$$

Plus généralement : G : groupe réductif (radical unipotent trivial)

= linéairement réductif (les représentations de dimension finie sont semi-simples)
char 0

non-exemple : $G = \mathbb{G}_a$ groupe additif

agit sur $V = \mathbb{C}^2$ via

$$\mathbb{G}_a \hookrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

V est extension non triviale de $\mathbb{C}$ par elle-même.

$T \subset G$ tore maximal $T \simeq (\mathbb{C}^*)^{\text{rk } G}$

eg. $\text{diag} \simeq (\mathbb{C}^*)^n \subset GL_n(\mathbb{C})$

représentations : $G \rightarrow GL(V)$, V $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie

$$GL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2.$$

caractères : $X^*(T) = \{ \alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_m \} \cong \mathbb{Z}^{\text{rk } G}$

co-caractères : $X_*(T) = \{ \lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow T \} \cong \mathbb{Z}^{\text{rk } G}$

Accouplement : $\alpha \circ \lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$
 $z \mapsto z^{\langle \lambda, \alpha \rangle}$

$\langle -, - \rangle : X_*(T) \times X^*(T) \rightarrow \mathbb{Z}$

Poids : $T \curvearrowright V$ diagonalisable :

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} V_\alpha$$

$$V_\alpha = \{ v \in V \mid t \cdot v = \alpha(t) v \quad \forall t \in T \}$$

$$\mathcal{W}(V) = \{ \alpha \in X^*(T) \mid V_\alpha \neq 0 \} \text{ poids de } V.$$

En particulier : $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ poids de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$

ex: $GL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$
 $\bigcup$
 $(\mathbb{C}^*)^2$ $\begin{matrix} \nearrow \\ (1,0) \end{matrix}$ $\begin{matrix} \searrow \\ (0,1) \end{matrix}$

$$(t_1, t_2) \cdot e_1 = t_1 e_1$$

$$(t_1, t_2) \cdot e_2 = t_2 e_2.$$

V symétrique : $\dim V_\alpha = \dim V_{-\alpha} \quad \forall \alpha \in X^*(T).$

$\simeq$ autodualité

ex: $T^*V = V \oplus V^*$ V rep. de G

V rep. de $SL_2(\mathbb{C})$

$\mathfrak{g}$ rep adjointe de G .

toutes les représentations en types $B_n, C_n, E_7, E_8, G_2, F_4$

$O(2n+1)$ $Sp(2n)$

Groupe de Weyl : $W = N_G(T)/T$

$N_G(T) = \{g \in G \mid g T g^{-1} = T\}$

$W_{G_{A_n}} \cong W_{S_n} \cong \mathbb{S}_n$ permutations, eng^{al}: groupe de Coxeter.

Théorème $W_T = \{e\}$

$W \curvearrowright$ poids de V .

Integralité cohomologique = décomposition de

$H_G^*(V)$ cohomologie équivariante

V ev $\Rightarrow$ contractible $\cong H_G^*(pt) \cong H^*(BG)$

E_G esp. top contractible avec action libre de G

$BG = E_G/G$

ex. $H_G^*(pt) = \mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ libre

$\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} = \varinjlim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$

$$\mathbb{P}^\infty = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$$

$$H^*(\mathbb{P}^N) \cong \mathbb{Q}[x] / (x^{N+1}) \quad \deg x = 2$$

$$H^*(\mathbb{P}^\infty) = H_{\mathbb{C}^*}^*(pt) \cong \mathbb{Q}[x].$$

$$T = (\mathbb{C}^*)^n \leadsto H_T^*(pt) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

$$\underline{G \text{ général}}: H_G^*(pt) \cong H_T^*(pt)^{W_{T \subset G \text{ max}}}$$

$$\leadsto H_{GL_n}^*(pt) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{\mathbb{S}_n} \quad \begin{array}{l} \text{polynômes} \\ \text{symétriques.} \end{array}$$

$$G = GL_2(\mathbb{C}) \quad \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2].$$

En général: $H_G^*(pt)$ est une algèbre de polynômes.

en particulier: $\dim_{\mathbb{Q}} H_G^*(pt) = +\infty$

Intégralité cohomologique: extraire un sous-espace

$$P_0 \subset H^*(V/G)$$

générateur (au sens de l'induction parabolique)

$$\dim P_0 < \infty$$

P_0 = "cohomologie cuspidale" de V/G .

2. Contexte et motivation

(a) Topologie de l'action de G sur V (= du champ quotient V/G)

$$\text{du quotient GIT} \quad V//G \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}(\mathbb{C}[V]^G)$$

schéma affine de f.f.
(Hilbert)

$V//G$ classe les G -orbites fermées

ex: ① $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^N$
mult. poids 1.

$$\mathbb{C}^N // \mathbb{C}^* \cong \text{pt}$$

② $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^2$

$$t \cdot (u, v) = (tu, t^{-1}v)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = \lambda \\ \{0\} \end{array} \right\} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{sont les orbites fermées}$$

$$\leadsto \mathbb{C}^2 // \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[xy] \subset \mathbb{C}[x, y]$$

③ $G \curvearrowright \mathfrak{g}$ adjointe

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} // G &\cong \mathfrak{t} // W \\ &\cong \mathbb{A}^{\text{rk } G} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{t} = \text{lie } T$$

④ non libre : $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[a, b, c, d]$

$$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^4 = V, \quad t \cdot (u, v, w, x) = (tu, tv, t^{-1}w, t^{-1}x)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 // \mathbb{C}^* &\cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[ac, ad, bc, bd]) \\ &\cong \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[A, B, C, D] / \langle AD = BC \rangle\right) \\ &\text{quadrique dans } \mathbb{C}^4. \end{aligned}$$

Calculer des générateurs de $\mathbb{C}[V]^G$: problème difficile et ancien
de théorie des invariants, même pour $SL(2)$ [invariants des
formes binaires]

Sylvester - Franklin, 1879 : degrés ≤ 10 avec erreurs
von Gall, 1880 ; Shioda 1967
Brouwer - Popoviciu 2010 : degré 9 92 générateurs
degré 10 104 générateurs
degré 11 : pas grand chose de connu.

- * Certains invariants portent des noms intéressants
catalecticant : invariant de degré $\frac{n}{2} + 1$ pour les formes
binaires de degré $n \in 2\mathbb{Z}$
canonizant : degré $\frac{n+1}{2}$ pour les formes binaires de
degré $n \in 2\mathbb{Z} + 1$

Intégralité cohomologique $\rightarrow$ calcul algorithmique
de $H^*(V//G)$ (conjecturalement)

coh. d'intersection = $\begin{cases} \text{coh. singulière si } V//G \text{ lisse} \\ \text{encode de l'info. sur les singularités} \\ \text{sinon.} \end{cases}$

② Topologie de $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$
 $\swarrow$ $\searrow$
 champ d'Artin lisse bon espace de module (Alper)
 globalisation de $V/G \rightarrow V//G$ (= situation locale)

ex. $\mathcal{M} = \text{Bun}_G$

$V/G \rightarrow V//G \xleftarrow{\text{spécialisation}} \mathcal{M} \xrightarrow{\text{principe local-global}} \mathcal{M}$
 reposant sur des théorèmes de
 tranches étales (Luna, Alper - Hall - Rydh)

③ Introduire et étudier de nouveaux invariants
énumératifs pour (G, V) .

③ Opérations

Induction parabolique

V une représentation de G

$\lambda: G_m \rightarrow T$ cocaractère

$$G^\lambda = \{g \in G \mid \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} = g \quad \forall t \in \mathbb{C}^*\}$$

$\subset G$

levi
sous-groupe

(en part: groupe réductif) Note: $T \subset G^\lambda$

$$V^\lambda = \{v \in V \mid \lambda(t) \cdot v = v \quad \forall t \in \mathbb{C}^*\}$$

$\subset V$

subrep.

$$G^{\lambda \geq 0} = \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \text{ existe}\}$$

$\subset G$

sous-groupe parabolique

$$V^{\lambda \geq 0} = \{v \in V \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot v \text{ existe}\}$$

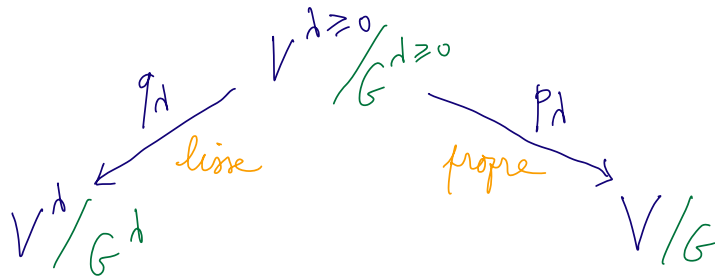
$\subset V$

G_m

$$\begin{pmatrix} \boxed{x} & 0 & & \\ & \boxed{y} & & \\ 0 & & \boxed{z} & \\ & & & \boxed{w} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{x} & * & * & * \\ & \boxed{y} & * & * \\ 0 & & \boxed{z} & * \\ & & & \boxed{w} \end{pmatrix}$$

Diagramme d'induction



$$\text{Ind}_{\lambda} := p_{\lambda*} q_{\lambda}^* : H^*(V^{\lambda} / G^{\lambda}) \rightarrow H^*(V / G)$$

induction parabolique.

$$\text{Ind}_{\lambda} : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{W^{\lambda}} \xrightarrow{\text{"S"}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^W$$

Formule explicite :

$$k_{\lambda} := \frac{\prod_{\substack{\alpha \in W(V) \\ \langle \lambda, \alpha \rangle > 0}} \alpha^{\dim V_{\alpha}}}{\prod_{\substack{\alpha \in W(\mathfrak{g}) \\ \langle \lambda, \alpha \rangle > 0}} \alpha^{\dim \mathfrak{g}_{\alpha}}} \in \text{Frac}(H_T^*(pt))$$

$$\text{Ind}_{\lambda}(f) = \frac{1}{|W^{\lambda}|} \sum_{w \in W} w \cdot (f^{k_{\lambda}}).$$

Démonstration: Calculs après localisation et calcul de classes d'Euler, en utilisant des résultats de Borel-Weil-Bott.

Classes caractéristiques

$H \subset G$ sous-groupe normal

$$H_G^*(pt) \underset{\text{e.v.}}{\cong} H_{G/H}^*(pt) \otimes H_H^*(pt)$$

non-canonique

$\leadsto$ action de $H_H^*(pt)$ sur $H_G^*(pt)$.

Théorème d'intégralité cohomologique

$$\lambda \sim \mu \iff \begin{cases} G^\lambda = G^\mu \\ V^\lambda = V^\mu \end{cases}$$

$$\leadsto \mathcal{P}_V := X_*(T) / \sim \quad \text{ensemble fini}$$
$$\uparrow$$
$$W$$

$$G_\lambda = \ker (G^\lambda \rightarrow GL(V^\lambda)) \cap Z(G^\lambda) \subset G_{\text{normal}}$$

$$W_\lambda = \{w \in W \mid w \cdot \lambda \sim \lambda\} \subset W$$

sous-groupe

$$\epsilon_{V,\lambda} : W_\lambda \longrightarrow \{\pm 1\} \quad \text{tel que}$$

$$k_{w \cdot \lambda} = \epsilon_{V,\lambda}(w) k_\lambda \quad \text{pour } w \in W_\lambda$$

Théorème (H., 2024) Soit V une représentation symétrique de G

Pour $\lambda \in X_*(T)$, il existe un espace vectoriel

$$P_\lambda \subset H_{G^\lambda}^*(V^\lambda) \quad \text{de dimension finie, stable}$$

sous l'action de W_λ , tel que

$$\bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \mathcal{P}/W} \left(P_{\lambda} \otimes H^*(pt/G_d) \right)^{E_{V,d}} \xrightarrow{\bigoplus \text{Ind}_{\lambda}} H_G^*(V)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\subset H_{G^d}^*(V^d) \\ + W_d \text{- action}}}$$

est un isomorphisme.

P_{λ} est gradué par le degré cohomologique

Def $p_{\lambda,i} := \dim P_{\lambda}^i \in \mathbb{N}$ invariants de
Donaldson-Thomas raffinés
 associés à (G, V)

$\leadsto$ nouveaux invariants énumératifs que l'on
 cherche à comprendre.

$\hookrightarrow$ donner une interprétation géométrique

5- Examples

$$\textcircled{1} \quad \overset{G}{\parallel} \quad GL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \overset{V}{\parallel} (T^*\mathbb{C}^2)^g \quad g \geq 0.$$

$$\begin{aligned} d_0: G_m &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1: G_m &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto (t, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2: G_m &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto (t, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3: G_m &\longrightarrow T \\ t &\longmapsto (t, t) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad V^{d_0} = V, \quad G^{d_0} = G, \quad G_{d_0} = \{1\}, \quad W_{d_0} = W, \quad k_{d_0} = 1$$

$$\mathcal{E}_{V, d_0} = \text{triv}$$

$$\bullet \quad V^{d_1} = (T^*(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}))^g, \quad G^{d_1} = T, \quad G_{d_1} = \mathbb{C}^* \times \{1\} \subset T, \quad W_{d_1} = \{1\},$$

$$k_{d_1} = \frac{x_1^g}{x_1 - x_2}$$

$$\mathcal{E}_{V, d_1} = \text{triv}$$

$$\bullet \quad V^{d_2} = \{0\}, \quad G^{d_2} = T, \quad G_{d_2} = T, \quad W_{d_2} = W,$$

$$k_{d_2} = \frac{(x_1 x_2)^g}{x_1 - x_2}, \quad \mathcal{E}_{V, d_2} = \text{sign}$$

$$V^{d_3} = \{0\}, \quad G^{d_3} = G, \quad G_{d_3} = G, \quad W_{d_3} = W, \quad k_{d_3} = (x_1, x_2)^{\sharp} \\ \varepsilon_{V, d_3} = \text{sgn}.$$

Quelques calculs :

$$\mathcal{P}_{d_0} = \bigoplus_{j=0}^{g-2} \mathbb{Q} \cdot (x_1 + x_2)^{\sharp j} \subset H^*(V/G) \cong \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_1} = \bigoplus_{j=0}^{g-1} \mathbb{Q} \cdot x_2^{\sharp j} \subset H^*(V^{d_1}/G^{d_1}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_2} = \mathbb{Q} \subset H^*(V^{d_2}/G^{d_2}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_3} = \{0\} \subset \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2].$$

isomorphisme d'intégralité

$$\mathcal{P}_{d_0} \oplus \mathcal{P}_{d_1} \oplus \mathbb{Q}[x_1] \oplus \left(\mathcal{P}_{d_2} \oplus \mathbb{Q}[x_1, x_2] \right)^{\text{sgn}} \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2] \\ (f, g, h) \mapsto f + \frac{x_1^{\sharp} g(x_1, x_2) - x_2^{\sharp} g(x_2, x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{2(x_1 x_2)^{\sharp} h(x_1, x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbb{C}^* \curvearrowright V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ t &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ t &\longmapsto t \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_V = \{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1\}$$

$$V^{\lambda_0} = V, \quad G^{\lambda_0} = G, \quad G_{\lambda_0} = \{1\}, \quad k_{\lambda_0} = 1$$

$$V^{\lambda_1} = \text{pt}, \quad G^{\lambda_1} = G, \quad G_{\lambda_1} = G, \quad k_{\lambda_1} = \prod_{k < 0} (kx)^{\dim V_k} \in \mathbb{Q}[x]$$

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\lambda_1, \lambda_0} : \mathbb{Q}[x] &\longrightarrow \mathbb{Q}[x] \\ f(x) &\longmapsto \underbrace{k_{\lambda_1}}_{= C_V \cdot x^{\sum_{k > 0} \dim V_k}} \cdot f(x) \end{aligned}$$

$$P_{\lambda_0} = \mathbb{Q}[x]_{\deg < \sum_{k > 0} \dim V_k}$$

$$P_{\lambda_1} = \mathbb{Q}$$

$$P_{\lambda_0} \oplus P_{\lambda_1} \otimes \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$$

$$(f, g) \longmapsto f + k_{\lambda_1} g.$$

6- Renforcements de l'isomorphisme d'intégralité

② Identifier P_d :

$$X_*(T)^{st} = \left\{ d \in X_*(T) \mid \bigcup G^d/G_d \text{-orbits fermées} \subset V^d \text{ ouvert} \right. \\ \left. + \text{ une } G^d/G_d \text{-orbite générale avec stabilisateur fini.} \right.$$

Conjecture :

$$P_d \cong \begin{cases} H^*(V^d // G^d) & \text{si } d \in X_*(T)^{st} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

→ Lorsque (G, V) provient d'un carquois symétrique, Meinhardt-Reineke ~2014

→ $(G = \mathbb{C}^*, V)$ (H, 2024)

→ V rep orthogonale de G : (BDINKP 2025)

⑥ Définir une version faisceautisée des P_λ .

$$\pi_\lambda: V^\lambda/G^\lambda \rightarrow V^\lambda//G^\lambda \quad d_\lambda = \dim V^\lambda - \dim G^\lambda$$

$$\begin{array}{ccc}
 & V^{\lambda \geq 0}/G^{\lambda \geq 0} & \\
 q_\lambda \swarrow & & \searrow p_\lambda \\
 V^\lambda/G^\lambda & & V/G \\
 \pi_\lambda \downarrow & & \downarrow \pi \\
 V^\lambda//G^\lambda & \xrightarrow{\quad z_\lambda \quad} & V//G
 \end{array}$$

$$\text{Ind}_\lambda: \mathcal{L}_\lambda * \pi_{\lambda*} \mathcal{Q}_{V^\lambda/G^\lambda}[d_\lambda] \rightarrow \pi_* \mathcal{Q}_{V/G}[d]$$

théorème (H, 2024)

Il existe des complexes constructibles W_λ -equivariants $\mathcal{P}_\lambda$ sur $V^\lambda//G^\lambda$ t.q.

$$\bigoplus_{\lambda \in P_V/W} \left(\mathcal{P}_\lambda \otimes H_{G_\lambda}^*(pt) \right)^{E_{V_1, \lambda}} \longrightarrow \pi_* \mathcal{Q}_{V/G}[d]$$

$$\lambda \in P_V/W$$

soit un isomorphisme.

Conjecture (renforcement de la version fausséeautisée)

$$P_\lambda \cong \begin{cases} \mathcal{IE}(V^\lambda // G^\lambda) [-\dim G^\lambda] & \text{si } \lambda \in X_*(T)^{st} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

→ Thm pour G, V provenant d'un carquois symétrique. (MR)

→ $G = \mathbb{C}^*$ (H, 2024)

→ V rep orthogonale de G : (BDINKP, 2025).

7- Historique

8. Construction des P_λ .