Contrôle 1 - Énoncé

Mercredi 27 février 2019

Durée : 1 heure. Aucun document n'est autorisé. Une rédaction propre et soignée sera appréciée à sa juste valeur. Si vous rendez plusieurs feuilles, inscrivez s'il vous plaît votre nom sur chacune d'entre elles et numérotez-les. Bon travail !

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2, on considère $P(x) = x^2 + x$, $Q(x) = x + 1$ et $R(x) = x - 1$. La famille (P, Q, R) engendre-t-elle $\mathcal{P}_2$? Est-elle libre ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La famille

$$(x \mapsto \sin(x), x \mapsto f(x))$$

est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 3. On considère le système linéaire homogène

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 3x + 4y + 5z + t = 0 \end{cases}.$$

Donner une base B de l'espace des solutions de $(\mathcal{S})$. Démontrer que le vecteur $u_3 = (2, -3, 1, -1)$ n'est pas solution de $(\mathcal{S})$. La famille constituée des vecteurs de B et de u_3 peut-elle être liée ? Pourquoi ?

Exercice 4. Soit $u_1 = (1, -1, 1, -1)$ et $u_2 = (0, 1, -1, 1)$. Les deux vecteurs sont-ils colinéaires ? Compléter la famille (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^4$.

L'exercice assez difficile suivant est là pour vous occuper si vous avez fini de rédiger les quatre autres exercices très proprement. Il n'est pas nécessaire d'y apporter une réponse pour avoir 20/20 *à ce contrôle. N'hésitez pas toutefois à indiquer les idées que vous avez le concernant.*

Exercice 5. On suppose qu'un rectangle dont les longueurs des côtés sont des nombres rationnels peut être pavé par des carrés. Montrer que les longueurs des côtés de chacun des carrés de ce pavage sont des nombres rationnels. *[Indication : Comment trouver un système linéaire à coefficients rationnels ayant pour solution la collection des longueurs des côtés des carrés ?]*