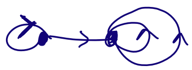
L'algèbre de Lie BPS

Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield, théorie des cordes.

joint work with Ben Davison and Sebastian Schlegel Mejia.

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois  boucles autorisées.

Q_0 : sommets, Q_1 : arêtes

$s, t : Q_1 \to Q_0$ source et but.

Notation : $i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_1$ pour $\alpha \in Q_1$ t.q $s(\alpha) = i$, $t(\alpha) = j$.

k un corps. Une représentation de Q sur k est

V_i, $i \in Q_0$ k-ev

$V_i \xrightarrow{x_\alpha} V_j$ pour $i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_1$.

$V \in \mathrm{Rep}_Q(k)$ = catégorie des représentations de Q sur k, dimension finie

vecteur dimension : $\underbrace{(\dim V_i)_{i\in Q_0}}_{\dim V} \in \mathbb{N}^{Q_0}$

kQ = algèbre des chemins de Q : une k-base est donnée par les chemins orientés dans Q. Le product est la concaténation des chemins, e_i lazy path at $i \in Q_0$

Représentations de Q $\leftrightarrow$ kQ-modules. $(e_i M)_{i \in Q_0} \leftarrow\!\shortmid M$

Fixons d. Les représentations de Q de dim d sur k sont encodées par l'espace

$$X_{Q,d} = \bigoplus_{i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_1} \mathrm{Hom}_k(k^{d_i}, k^{d_j}).$$

La redondance est donnée par l'action du groupe algébrique

$$GL_d := \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i}$$

$$(g_i)_{i\in Q_0} \cdot (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1} := (g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1})_{\alpha \in Q_1}$$

$$\mathrm{Rep}_Q(k)[d]/\mathrm{iso} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \text{orbites de } GL_d \text{ dans } X_{Q,d} = X_{Q,d}/GL_d.$$

ensembliste.

V. Kac, ~1980 : comptons les représentations de Q sur $\mathbb{F}_q$ pour tout Q et tout q, i.e. $\# X_{Q,d}/GL_d$

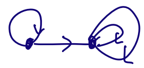
<u>Échauffement</u> : $Q = \bullet$ $\quad$ 1 rep. $\forall d \in \mathbb{N}$

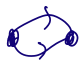
$Q =$  $\quad$ matrices $d \times d$ à conjugaison près.

$d = 1 \longrightarrow q$

d quelconque : plus difficile

$Q =$  (g) $\quad d = 1 \quad q^g$.

$Q =$  $\quad d = 1 \quad 2q^3$.

$Q =$  Kronecker. $q+2$ $\qquad A_{Q,(1,1)}(q) = \# \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = q+1$.

On obtient des polynômes en q, à coefficients ≥ 0.

Les représentations de Q sur $\mathbb{F}_q$ peuvent être plus ou moins élémentaires :

arbitraires $\supset$ indécomposables $\supset$ absolument indécomposables.

<u>Fonctions de comptage</u>

$M_{Q,d}(q) = \#\{$isoclasses de représentations de Q sur $\mathbb{F}_q$ de vecteur dimension $d.\}$

$I_{Q,d}(q) = \#\{\ldots$ représentations indécomposables $\ldots\}$ $\qquad M \neq A \oplus B$ avec $A, B \neq 0$

$A_{Q,d}(q) = \#\{\ldots$ représentations absolument indécomposables $\ldots\}$

$M/\mathbb{F}_q \qquad M \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ indécomposable.

Théorème (Kac, ~1980) Q sans boucles.

* $M_{Q,d}, I_{Q,d}, A_{Q,d} \in \mathbb{Q}[q]$.
* indépendants de l'orientation
* invariance sous l'action du groupe de Weyl du carquois [action groupes de tresses sur groupes quantiques / alg. enveloppantes]

Ces fonctions sont reliées les unes aux autres :

$$(M_{Q,d})_d \rightsquigarrow (I_{Q,d})_d$$

Krull-Schmidt [toute représentation est somme directe d'indécomposable de façon essentiellement unique].

$$(I_{Q,d})_d \longleftrightarrow (A_{Q,d})_d$$

descente galoisienne

Algèbre de Kac-Moody associée à Q [par générateurs et relations]

$Q \rightsquigarrow A = (a_{i,j})_{i,j \in Q_0}$ matrice de Cartan symétrique

$$a_{ij} = 2\delta_{i,j} - \#\{i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_1\} - \#\{j \xrightarrow{\alpha} i \in Q_1\}$$

$\mathfrak{g}_Q$ est engendrée (sur $\mathbb{Q}$) par e_i, f_i, h_i $i \in Q_0$ avec les relations

* $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$
* $[h_i, e_j] = a_{ij} e_j$
* $[h_i, f_j] = -a_{ij} e_j$
* $[h_i, h_j] = 0$
* $\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0$
* $\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0$.

Propriétés de base : * Si Q est de type fini A, D, E, $\mathfrak{g}_Q$ est l'algèbre de Lie semisimple correspondante ($\Rightarrow$ dim. finie / $\mathbb{Q}$)

* Dans tous les autres cas, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{g}_Q = +\infty$

* $\mathfrak{g}_Q = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}^{Q_0}} \mathfrak{g}_Q[d]$ en assignant à e_i le degré $(\delta_{ji})_{j\in Q_0}$ et à f_j $(-\delta_{ji})_{j\in Q_0}$.

* décomposition triangulaire $\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{n}_Q^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$
$(f_i) \quad (h_i) \quad (e_i)$

<u>Conjectures</u> (Kac, 1980)

① <u>Terme constant</u> : $A_{Q,d}(0) = \dim \mathfrak{g}_Q[d]$ [Q sans boucles]
(Théorème Hausel 2008)

② <u>Positivité</u> : $A_{Q,d} \in \mathbb{N}[q]$ (Théorème Hausel-Letellier-Rodriguez-Villegas 2012). [Q arbitraire]

[Si Q est de type fini ADE, très bien connu :
* multiplicité 1 des espaces de poids
* Théorème de Gabriel : $\{\text{indec de } \mathrm{Rep}_Q\}/\sim \overset{1:1}{\Leftrightarrow}$ racines >0 de $\mathfrak{g}_Q$
<u>indépendant du corps de base</u>.]

<u>Nouveau problème</u> (Bozec-Schiffmann) (supporté par ces conjectures)
Définir une algèbre de Lie $\mathbb{Z}^{Q_0}\times\mathbb{Z}$-graduée, $\tilde{\mathfrak{n}}_Q$, telle que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} \tilde{\mathfrak{n}}_Q[d,m]\, q^m = A_{Q,d}(q) \quad \forall d\in\mathbb{N}^{Q_0}$$

+ conditions : * $\mathfrak{n}_Q^+ = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^{Q_0}} \tilde{\mathfrak{n}}_Q[d,0]$

* $\tilde{\mathfrak{n}}_Q$ est la partie positive d'une <u>algèbre de Kac-Moody généralisée</u> (au sens de Borcherds) $\tilde{\mathfrak{g}}_Q$.
(définie plus tard)

+ Question de Okounkov (enveloppes stables et Yangiens) raffinée. [Okounkov pose $q = 1$].

Q carquois arbitraire.

<u>Théorème</u> (DHS-2023) : L'algèbre de Lie BPS de l'algèbre préprojective Π_Q de Q répond à ce problème.

Maintenant, j'explique une <u>construction de cette algèbre de Lie</u>

↳ construction géométrique

Je dois maintenant introduire de nouveaux objets.

1. Algèbres de Hall cohomologiques
2. Algèbre BPS associative
3. Algèbres GKM.
4. Le caractère et la structure de l'algèbre BPS.

1. Algèbres de Hall cohomologiques (CoHA)

technologie pour étudier la cohomologie des espaces de modules d'objets de certaines catégories en enrichissant la structure.

carquois

Champs et espaces de modules

algèbre préprojective $Q \longrightarrow \overline{Q} = (Q_0, \overline{Q_1})$ double

$\overline{Q_1} = Q_1 \sqcup Q_1^*$

$\underset{i \to j}{\alpha \in Q_1} \rightsquigarrow j \xrightarrow{\alpha^*} i \in Q_1^*$.

$\mathbb{C}\overline{Q} \ni \rho = \sum_{\alpha \in Q_1} [\alpha, \alpha^*]$ relation préprojective.

$\Pi_Q = \mathbb{C}\overline{Q}/(\rho)$ algèbre préprojective.

$d \in \mathbb{N}^{Q_0}$. $\mu_d : X_{\overline{Q}, d} \longrightarrow \mathfrak{gl}_d$ app moment

$(x_\alpha, x_\alpha^*)_{\alpha \in Q_1} \mapsto \sum_{\alpha \in Q_1} [x_\alpha, x_{\alpha^*}]$

En première approximation

$\mathfrak{M}_{\Pi_Q, d} := [\mu_d^{-1}(0) / GL_d]$ champ quotient, champ algébrique — Paramétrise tous les objets de $\mathrm{Rep}\,\Pi_Q$

$\downarrow JH$

$\mathcal{M}_{\Pi_Q, d} := \mu_d^{-1}(0) /\!/ GL_d$ GIT quotient — Paramétrise les objets semisimples.

$D^+_c(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$ = catégorie dérivée constructible de $\mathcal{M}_{\Pi_Q}$.

$\mathcal{F} \in D^+_c(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$: $\exists\ \mathcal{M}_{\Pi_Q} = \bigsqcup_{a \in A} F_a$ tq $\mathcal{F}|_{F_a}$ est localement constant, à fibre un $\mathbb{Q}$-ev de dim finie.

<u>structure monoïdale</u> : $\mathcal{F} \boxdot \mathcal{G} := \oplus_*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$.

<u>CoHA</u> : * Procédé naturel donnant une algèbre associative.
* Difficile à étudier en général !

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Exact}_{\Pi_Q} \arrow[dl, "q"', "\text{“quasi-lisse”}"] \arrow[dr, "p", "\text{propre}"'] & \\
\mathfrak{M}_{\Pi_Q} \times \mathfrak{M}_{\Pi_Q} \arrow[d, "JH \times JH"'] & & \mathfrak{M}_{\Pi_Q} \arrow[d, "JH"] \\
\mathcal{M}_{\Pi_Q} \times \mathcal{M}_{\Pi_Q} \arrow[rr, "\oplus"] \arrow[dr] & & \mathcal{M}_{\Pi_Q} \arrow[dl, "\pi"] \\
 & \mathrm{pt} &
\end{tikzcd}$$

$m = p_* q^*$ donne un produit sur $JH_* \mathbb{D}\mathbb{Q}^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{M}_{\Pi_Q}} \in D^+_c(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$.

$JH_* \mathbb{D}\mathbb{Q}^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{M}_{\Pi_Q}} =: \mathcal{A}_{\Pi_Q}$

$\pi_* \mathcal{A}_{\Pi_Q} = H^{BM}(\mathfrak{M}_{\Pi_Q})$ est une algèbre associative.

② L'algèbre BPS

$$\mathcal{A}_{\Pi_Q} \in \mathcal{D}^+_c(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$$

Pour découper les objets de $\mathcal{D}^+_c(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$, on utilise des t-structures.

* On a la t-structure standard : elle permet de tronquer les complexes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{F}^1 & \xrightarrow{d^1} & \mathcal{F}^2 & \xrightarrow{d^2} \cdots \to & \mathcal{F}^i & \xrightarrow{d^i} & \mathcal{F}^{i+1} & \\
& & & \uparrow \tau^{\leq i} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
& & & \mathcal{F}^1 & \to & \mathcal{F}^2 & \to \cdots \to & \ker d^i & \to & 0 & \to \cdots
\end{array}$$

* On a la t-structure perverse. Différente troncation des complexes.
(Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber ~1980)

$$\mathcal{BPS}_{\Pi_Q} := \text{partie de } \mathcal{A}_{\Pi_Q} \text{ en degré } 0$$
$$= {}^p\mathcal{H}^0(\mathcal{A}_{\Pi_Q}).$$

Prop : m induit une multiplication sur $\mathcal{BPS}_{\Pi_Q} \in \mathrm{Perv}(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$

Démonstration : ${}^p\mathcal{H}^i(\mathcal{A}_{\Pi_Q}) = 0$ pour $i < 0$

$$\pi : \mathcal{M}_{\Pi_Q} \to \mathrm{pt}$$

$\mathrm{BPS}_{\Pi_Q} := \pi_* \mathcal{BPS}_{\Pi_Q}$ est une algèbre associative au sens classique.

$\cap$ sous-algèbre,

$\pi_* \mathcal{A}_{\Pi_Q}$

(3) Algèbres de KM généralisées (d'après Borcherds)

Ingrédients : • $\mathfrak{h}$ $\mathbb{Q}$-ev avec $(-,-)$ forme bilinéaire

• $(h_i)_{i \in \Phi^+} \subset \mathfrak{h}$ ensemble dénombrable de "racines positives"

$(h_i, h_j) \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ si $i \neq j$,

$(h_i, h_i) \in 2\mathbb{Z}_{\leq 1}$ $\forall i \in \Phi_+$.

• $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \Phi_+} \mathfrak{g}_i$ espace Φ_+-gradué, $\mathbb{Z}$-gradué
ensemble de "générateurs de Chevalley positifs"

Construction : $\mathfrak{g}_{\mathfrak{g}}$ = algèbre de Lie libre engendrée par $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\vee$ avec
espace dual

relations

* $[h, h'] = 0$ $\forall h, h' \in \mathfrak{h}$
* $[h, \alpha_i^\vee] = \pm (h, h_i) \alpha_i^\vee$ $\alpha_i^\vee \in \mathfrak{g}_i^\vee$
* $[\alpha_i, \alpha_j^\vee] = \delta_{ij} \alpha_j^\vee(\alpha_i) h_i$
* relations de Serre $[\alpha_i^\vee, -]^{1-(h_i,h_j)}(\alpha_j^\vee) = 0$
 si $(h_i, h_j) = 0$ ou $(h_i, h_i) = 2$.

Caractéristiques : Trichotomie pour les racines simples h_i

① réelles : $(h_i, h_i) = 2$

② isotropes : $(h_i, h_i) = 0$] imaginaires

③ hyperboliques : $(h_i, h_i) < 0$.]

Beaucoup de résultats connus pour les algèbres de Lie semisimples / KM s'étendent :

$\mathfrak{g}_{\mathfrak{g}} = n_{\mathfrak{g}}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \underbrace{n_{\mathfrak{g}}^+}_{\text{engendrée par } \mathfrak{g} \text{ avec relations de Serre}}$ décomposition triangulaire

Exemples de GKM :

Q carquois (boucles autorisées)

$\mathfrak{h} = \mathbb{Q}^{Q_0}$

$$(d,e) = \chi_Q(d,e) + \chi_Q(e,d) = 2\sum_{i\in Q_0} d_i e_i - \sum_{a\in Q_1} \left(d_{s(a)} d_{t(a)} + d_{t(a)} d_{s(a)} \right).$$

forme d'Euler symétrisée du carquois

(1) Q sans boucles. $\Phi_+ = Q_0$ $h_i = 1_i$ $\mathfrak{g}_i = \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\alpha_i$

$\mathfrak{g}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_Q$ est l'algèbre de KM de Q.

(2) $Q = \circlearrowleft$ $(-,-) = 0$.

$\Phi_+ = \mathbb{Z}_{\geq 1} \subset \mathbb{Q} = \mathfrak{h}$

$\mathfrak{g}_n = \mathbb{Q}[2]$ $n \geq 1$

$\mathfrak{g}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Heis}_\infty$ algèbre de Heisenberg, qui agit sur les schémas de Hilbert de points dans $\mathbb{C}^2$.

(4) Le caractère et la structure de l'algèbre BPS

Théorème (DHS) $BPS_{\Pi_Q} \simeq U(\tilde{\mathfrak{n}}_Q^+)$ où $\tilde{\mathfrak{n}}_Q^+$ est la partie positive d'une GKM engendrée par $IH(\mathcal{M}_{\Pi_Q})$.

[description explicite par générateurs et relations :]

$\Phi_+ =$ racines ≥ 0 de $\mathfrak{g}_Q$. ['combinatorial definition']

- réelles : $\mathfrak{g}_d = \mathbb{Q}$ si $d = 1_i$, $i \in Q_0$ et pas de boucles en i.
- isotropes : $\mathfrak{g}_d = IH(\mathcal{M}_{\Pi_Q, d'})$ si d iso, $d = ld'$ et d' indivisible
- hyperboliques : $\mathfrak{g}_d = IH^*(\mathcal{M}_{\Pi_Q, d})$ si d hyperbolique.

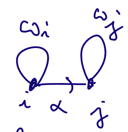
$\mathfrak{g}_Q =$ GKM engendrée par $\bigoplus_{d \in \Phi_+} \mathfrak{g}_d$.

$\tilde{\mathfrak{n}}_Q^+$ est $\mathbb{N}^{Q_0} \times \mathbb{Z}$-graduée

$$* \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} \dim \tilde{\mathfrak{n}}_Q^+[d, m]\, q^m = A_{Q,d}(q).$$

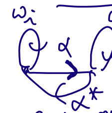
Caractère de $\tilde{\mathfrak{n}}^+_Q$

$A_{Q,\bullet}(q) = \#^{\text{naive}}\{\text{repr. abs indec de } Q/\mathbb{F}_q\}/\sim$ $\qquad Q = \bullet \to \bullet$

$= \#^{\text{champs}}\{\text{repr abs indec } \mathbb{F}Q^f/R \,/\, \mathbb{F}_q\}/\sim$ $\qquad Q^f =$ 

$R =$ relations $\quad \omega_j\alpha = \alpha\omega_i \ \forall \alpha, i$

$\simeq H^{BM}(\mathfrak{M}(\mathbb{C}Q^f/R_I))$

red. dim $\quad \simeq H(\mathfrak{M}(\mathbb{C}\tilde{Q}), \phi_{Tr(\tilde{W})})$ $\qquad \tilde{Q}$ 

$W =$ can. potential $= (\omega_i + \omega_j)(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha)$

red. dim $\quad \simeq H(\mathfrak{M}(\Pi_Q))$

$\Rightarrow$ Chom (Davison) $\quad A_{Q,d}(q) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \dim(\tilde{\mathfrak{n}}^+[d,m])\, q^m$.

La démonstration de $BPS_{\Pi_Q} \simeq U(\tilde{\mathfrak{n}}^+_Q)$ repose sur trois ingrédients essentiels :

$\boxed{1}$ Le théorème du voisinage pour les catégories 2CY

$\boxed{2}$ Le théorème de décomposition pour $JH : \mathfrak{M}_{\Pi_Q} \to M_{\Pi_Q}$

] Davison

$\boxed{3}$ La description de la top-CoHA strictement seminilpotente pour un carquois arbitraire. [H.]