Intégralité cohomologique pour les représentations symétriques des groupes réductifs.

On travaille sur $\mathbb{C}$.

0. Motivation

G groupe réductif

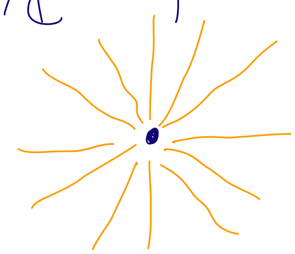
V représentation de G

$$V/\!/G = \mathrm{Spec}\,(\underbrace{\mathbb{C}[V]^G}_{\text{algèbre des invariants}})$$

= variété affine dont $\mathbb{C}[V]^G$ est l'algèbre des fonctions régulières.

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ G-orbites fermées dans V.

ex : ① $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^N$ mult. poids 1. $\qquad \mathbb{C}^N/\!/\mathbb{C}^* \cong \mathrm{pt}$



② $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^2 \qquad t\cdot(u,v) = (tu, t^{-1}v)$

$\{xy = \lambda\} \quad \lambda \neq 0 \qquad$ sont les orbites fermées

$\{0\}$

$\rightsquigarrow \mathbb{C}^2/\!/\mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}$

$$\mathbb{C}[x,y]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[xy] \subset \mathbb{C}[x,y].$$

③ $G \curvearrowright \mathfrak{g}$ adjointe pour GL_n.

$\mathfrak{t} = \text{Lie}\ T$

$\mathfrak{g}/\!/G \cong \mathfrak{t}/\!/W$

$\cong \mathbb{A}^{\text{rk}\, G}$

W groupe de Weyl de G

(isomorphisme de restriction de Chevalley)

④ non lisse : $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[a,b,c,d]$

$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^4 = V$, $t \cdot (u,v,w,x) = (tu, tv, t^{-1}w, t^{-1}x)$

$$\mathbb{C}^4 /\!/ \mathbb{C}^* \cong \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[ac, ad, bc, bd])$$
$$\cong \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[A,B,C,D] / \langle AD = BC \rangle \right)$$

quadrique dans $\mathbb{C}^4$.

⑤ $SL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \text{Mat}_{2\times n}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow$ cone affine sur $Gr(2,n)$.

<u>But</u> : * comprendre la topologie / les singularités de $V/\!/G$.

$\rightsquigarrow$ cohomologie d'intersection $IH^*(V/\!/G)$ perversité autoduale

≈ cohomologie singulière qui tient compte des singularités.

= espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué.

vérifie la duality de Poincaré, même pour les espaces singuliers
$H^i \cong H_c^{n-i}$.

$\rightsquigarrow$ questions intéressantes de comptage sur les corps finis

Étude de $IH^*(X/\!/G)$ X var. algébrique lisse

- Kirwan '80 désingularisation partielle $\tilde{X} \to X$ + connection entre $IH^*(X/\!/G)$ et $H^*(X/\!/G)$

pour X projective lisse

- Halpern-Leistner : connection entre $D^b_{coh}(X/G)$ et $\mathcal{D}^b_{coh}(X/\!/G)$ X quasi-projective.
  "programme du modèle minimal non-commutatif"

- Špenko - Van den Bergh : décompositions

semiorthogonales de $\mathcal{D}^b_{coh}(V/G)$ pour extraire des résolutions catégoriques de $V/\!/G$.

Cohomologie d'intersection encode souvent des information combinatoires de la th des représentations

→ polynôme de KL & variétés de Schubert

→ faisceaux caractères et rep des groupes $GL_n(\mathbb{F}_q)$.

→ Représentations de groupes de Coxeter (théorie de Springer) tout élément agit de façon unipotente sur toutes les repr.

sous groupe unipotent connexe normal max

1 - Situation

$G = GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C}), (\mathbb{C}^*)^N, Sp_{2n}(\mathbb{C}) \dots$

Plus généralement : G : groupe réductif (radical unipotent trivial)

$\underset{\text{char } 0}{=}$ linéairement réductif (les représentations de dimension finie sont semisimples)

<u>non-exemple</u> : $G = \mathbb{G}_a$ groupe additif

agit sur $V = \mathbb{C}^2$ via

$$\mathbb{G}_a \hookrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

V est extension non triviale de $\mathbb{C}$ par elle-même.

$T \subset G$ tore maximal $T \simeq (\mathbb{C}^*)^{\operatorname{rk} G}$

e.g. $\operatorname{diag} \simeq (\mathbb{C}^*)^n \subset GL_n(\mathbb{C})$

représentations : $G \longrightarrow GL(V)$, V $\mathbb{C}$-ev de dimension finie

$GL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2$.

caractères : $X^*(T) = \{ \alpha : T \to \mathbb{G}_m \} \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{rk}\, G}$

cocaractères : $X_*(T) = \{ \lambda : \mathbb{G}_m \to T \} \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{rk}\, G}$

Accouplement : $\alpha \circ \lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$

$$z \longmapsto z^{\langle \lambda, \alpha \rangle}$$

$$\langle -, - \rangle : X_*(T) \times X^*(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Poids : $T \curvearrowright V$ diagonalisable :

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} V_\alpha$$

$$V_\alpha = \{ v \in V \mid t \cdot v = \alpha(t) v \quad \forall t \in T \}$$

$W(V) = \{ \alpha \in X^*(T) \mid V_\alpha \neq 0 \}$ poids de V.

En particulier : $W(\mathfrak{g})$ poids de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$

ex : $GL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$

$\cup$ $(\mathbb{C}^*)^2$ $\quad (1,0) \quad (0,1)$

$$(t_1, t_2) \cdot e_1 = t_1 e_1$$

$$(t_1, e_2) \cdot e_2 = t_2 e_2 .$$

V **symétrique** : $\dim V_\alpha = \dim V_{-\alpha} \qquad \forall \alpha \in X^*(T)$.

$\simeq$ autodualité

ex: • $T^*V = V \oplus V^*$ $\quad V$ rep. de G

• V rep. de $SL_2(\mathbb{C})$

• $\mathfrak{g}$ rep adjointe de G.

• toutes les représentations en types B_n, C_m, E_7, E_8, F_2

$O(2n+1)$ $\quad Sp(2n)$

Groupe de Weyl

: $W = N_G(T)/T$

$$N_G(T) = \{ g \in G \mid g T g^{-1} = T \}$$

$W_{GL_n} \simeq W_{SL_n} \simeq \mathfrak{S}_n$ permutations, en g$^{\text{al}}$: groupe de Coxeter.

T tore $\quad W_T = \{e\}$

$W \curvearrowright$ poids de V.

Intégralité cohomologique

$H_G^*(V)$ cohomologie équivariante

[G connexe, comportement assez différent quand G fini]

V ev $\Rightarrow$ contractible $\quad \cong H_G^*(pt) \cong H^*(BG)$

E_G esp. top contractible avec action libre de G

$BG = E_G/G$

ex. $H^*_{\mathbb{C}^*}(pt)$: $G = \mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ libre

$$\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} = \varinjlim_{N\to\infty} \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{P}^\infty = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$$

$$H^*(\mathbb{P}^N) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^{N+1}) \qquad \deg x = 2$$

$$H^*(\mathbb{P}^\infty) = H^*_{\mathbb{C}^*}(pt) \simeq \mathbb{Q}[x].$$

$T = (\mathbb{C}^*)^n \quad \rightsquigarrow \quad H^*_T(pt) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$

cohomologie avec coeffs dans un corps.

G général : $H^*_G(pt) \cong H^*_T(pt)^W \qquad T \subset G$ max tore.

algèbre de polynômes (Chevalley-Shephard-Todd)

$\rightsquigarrow \quad H^*_{GL_n}(pt) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ polynômes symétriques.

$G = GL_2(\mathbb{C}) \qquad \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2].$

En général : $H^*_G(pt)$ est une algèbre de polynômes.

en particulier : $\dim_{\mathbb{Q}} H^*_G(pt) = +\infty$

Intégralité cohomologique : extraire un sous-espace

$$P_0 \subset H^*(V/G)$$

générateur (au sens de l'induction parabolique)

$\dim P_0 < \infty$

P_0 = "cohomologie cuspidale" de V/G.

2. Contexte et motivation

ⓐ Topologie de l'action de G sur V (= du champ quotient V/G)

du quotient GIT $\quad V/\!/G \overset{def}{=} \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[V]^G)$
schéma affine de t.f (Hilbert)

$V/\!/G$ classifie les G-orbites fermées

Calculer des générateurs de $\mathbb{C}[V]^G$: problème difficile et ancien de théorie des invariants, même pour $SL_2(\mathbb{C})$ [invariants des formes binaires]

- Sylvester – Franklin, 1879 : degrés ≤ 10 avec erreurs
- von Gall, 1880 ; Shioda 1967
- Brouwer – Popoviciu 2010 : degré 9 — 92 générateurs ; degré 10 — 104 générateurs
- degré 11 : pas grand chose de connu.

* Certains invariants portent des noms intéressants

catalecticant : invariant de degré $\frac{n}{2}+1$ pour les formes binaires de degré $n \in 2\mathbb{Z}$

canonizant : degré $\frac{n+1}{2}$ pour les formes binaires de degré $n \in 2\mathbb{Z}+1$

Intégralité cohomologique $\rightsquigarrow$ calcul algorithmique de $IH^*(V/\!/G)$ (conjecturalement)

coh. d'intersection $= \begin{cases} \text{coh. singulière si } V/\!/G \text{ lisse} \\ \text{encode de l'info. sur les singularités sinon.} \end{cases}$

ⓑ Topologie de $\mathfrak{M} \xrightarrow{\pi} M$

champ d'Artin lisse

bon espace de module (Alper)

globalisation de $V/G \longrightarrow V/\!/G$. (= situation locale)

ex. $\mathfrak{M} = \mathrm{Bun}_G$

$$V/G \longrightarrow V/\!/G \;\underset{\text{principe local-global}}{\overset{\text{spécialisation}}{\rightleftarrows}}\; \mathfrak{M} \longrightarrow M$$

reposant sur des théorèmes de tranches étales (Luna, Alper-Hall-Rydh)

ⓒ Introduire et étudier de nouveaux invariants énumératifs pour (G, V).

$\rightsquigarrow$ analogue des invariants de Donaldson-Thomas (géométrie énumérative)

$\ast$

③ Opérations

Induction parabolique

V une représentation de G

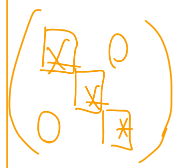
$\lambda : \mathbb{G}_m \to T$ cocaractère

$$G^{\lambda} = \{ g \in G \mid \lambda(t)\, g\, \lambda(t)^{-1} = g \quad \forall\, t \in \mathbb{C}^* \}$$

$\subset G$

Levi subgroup (en part.: groupe réductif) Note: $T \subset G^{\lambda}$

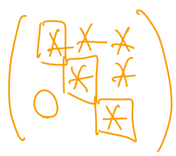
GL_n



$$V^{\lambda} = \{ v \in V \mid \lambda(t).\, v = v \quad \forall t \in \mathbb{C}^* \}$$

$\subset V$

subrep.



$$G^{\lambda \geq 0} = \{ g \in G \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t)\, g\, \lambda(t)^{-1} \text{ existe} \}$$

$\subset G$

sous-groupe parabolique

$$V^{\lambda \geq 0} = \{ v \in V \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t).\, v \text{ existe} \}$$

$\subset V$

Diagramme d'induction

$$\begin{tikzcd}
 & V^{\lambda \geq 0} / G^{\lambda \geq 0} \arrow[dl, "q_\lambda"', "\text{lisse}"] \arrow[dr, "p_\lambda", "\text{propre}"'] & \\
V^\lambda / G^\lambda & & V/G
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Ind}_\lambda := p_{\lambda *} q_\lambda^* \; : \; H^*(V^\lambda / G^\lambda) \longrightarrow H^*(V/G)$$

induction parabolique [version cohomologique ⇝ envisager des versions constructibles, avec faisceaux ℓ-adiques]

$\wr\mathrm{S}$

$$\mathrm{Ind}_\lambda : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{W^\lambda} \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^W$$

Formule explicite :

$$k_\lambda := \frac{\prod_{\substack{\alpha \in w(V) \\ \langle \lambda, \alpha \rangle > 0}} \alpha^{\dim V_\alpha}}{\prod_{\substack{\alpha \in w(\mathfrak{g}) \\ \langle \lambda, \alpha \rangle > 0}} \alpha^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}} \in \mathrm{Frac}\left(H_T^*(pt)\right)$$

$$\mathrm{Ind}_\lambda(f) = \frac{1}{|W^\lambda|} \sum_{w \in W} w \cdot (f k_\lambda).$$

<u>Démonstration</u> : Calculs après localisation et calcul de classes d'Euler, en utilisant des résultats de Borel-Weil-Bott.

Classes tautologiques

$H \subset G$ sous-groupe normal

$$H^*_G(pt) \underset{\text{e.v.}}{\cong} H^*_{G/H}(pt) \otimes H^*_H(pt)$$

non-canonique

$\rightsquigarrow$ action de $H^*_H(pt)$ sur $H^*_G(pt)$.

Théorème d'intégralité cohomologique

$$\lambda \sim \mu \iff \begin{cases} G^\lambda = G^\mu \\ V^\lambda = V^\mu \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \underset{\underset{W}{\circlearrowleft}}{P_V} := X_*(T)/\sim \quad \text{ensemble fini}$$

$$G_\lambda = \ker\left(G^\lambda \longrightarrow GL(V^\lambda)\right) \cap Z(G^\lambda) \underset{\text{normal}}{\subset} G$$

$$W_\lambda = \{ w \in W \mid w\cdot\lambda \sim \lambda \} \underset{\text{sous-groupe}}{\subset} W$$

$\varepsilon_{V,\lambda} : W_\lambda \longrightarrow \{\pm 1\}$ tel que

$$k_{w\cdot\lambda} = \varepsilon_{V,\lambda}(w)\, k_\lambda \quad \text{pour } w \in W_\lambda$$

Théorème (H., 2024) Soit V une représentation symétrique de G

Pour $\lambda \in X_*(T)$, il existe un espace vectoriel

$P_\lambda \subset H^*_{G^\lambda}(V^\lambda)$ de dimension finie, stable

sous l'action de W_λ, tel que

$$\bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \mathcal{P}_V/W} \Big(\underbrace{P_\lambda \otimes H^*(pt/G_\lambda)}_{\substack{\subset H^*_{G^\lambda}(V^\lambda) \\ + W_\lambda\text{-action}}} \Big)^{\varepsilon_{V,\lambda}} \xrightarrow[\oplus \mathrm{Ind}_\lambda]{} H^*_G(V)$$

est un isomorphisme.

P_λ est gradué par le degré cohomologique

Déf $p_{\lambda,i} := \dim P_\lambda^i \in \mathbb{N}$ invariants de Donaldson-Thomas raffinés associés à (G,V)

$\rightsquigarrow$ nouveaux invariants énumératifs que l'on cherche à comprendre.

↳ donner une interprétation géométrique

5- Exemples

(1) $\underset{G}{\underbrace{GL_2(\mathbb{C})}} \circlearrowright \underset{V}{\underbrace{(T^*\mathbb{C}^2)^g}}$ $\qquad g \geq 0.$

$$d_0 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$
$$t \longmapsto 1$$

$$d_1 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$
$$t \longmapsto (t,1)$$

$$d_2 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$
$$t \longmapsto (t,t^2)$$

$$d_3 : \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$
$$t \longmapsto (t,t)$$

- $V^{d_0} = V$, $G^{d_0} = G$, $G_{d_0} = \{1\}$, $W_{d_0} = W$, $k_{d_0} = 1$
  $\varepsilon_{V,d_0} = \text{triv}$
- $V^{d_1} = (T^*(0 \oplus \mathbb{C}))^g$, $G^{d_1} = T$, $G_{d_1} = \mathbb{C}^* \times \{1\} \subset T$, $W_{d_1} = \{1\}$,
  $k_{d_1} = \dfrac{x_1^g}{x_1 - x_2}$ $\qquad \varepsilon_{V,d_1} = \text{triv}$
- $V^{d_2} = \{0\}$, $G^{d_2} = T$, $G_{d_2} = T$, $W_{d_2} = W$,
  $k_{d_2} = \dfrac{(x_1 x_2)^g}{x_1 - x_2}$, $\varepsilon_{V,d_2} = \text{sign}$

- $V^{d_3} = \{0\}$, $G^{d_3} = G$, $G_{d_3} = G$, $W_{d_3} = W$, $k_{d_3} = (x_1 x_2)^g$

$\varepsilon_{V, d_3} = \mathrm{sgn}$.

Quelques calculs :

$$\mathcal{P}_{d_0} = \bigoplus_{j=0}^{g-2} \mathbb{Q}\cdot (x_1+x_2)^j \subset H^*(V/G) \cong \mathbb{Q}[x_1+x_2, x_1 x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_1} = \bigoplus_{j=0}^{g-1} \mathbb{Q}\cdot x_2^j \subset H^*(V^{d_1}/G^{d_1}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_2} = \mathbb{Q} \subset H^*(V^{d_2}/G^{d_2}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_3} = \{0\} \subset \mathbb{Q}[x_1+x_2, x_1 x_2].$$

isomorphisme d'intégralité

$$\mathcal{P}_{d_0} \oplus \mathcal{P}_{d_1} \otimes \mathbb{Q}[x_1] \oplus \left(\mathcal{P}_{d_2} \otimes \mathbb{Q}[x_1, x_2]\right)^{\mathrm{sgn}} \longrightarrow \mathbb{Q}[x_1+x_2, x_1 x_2]$$

$$(f, g, h) \longmapsto f + \frac{x_1^g g(x_1,x_2) - x_2^g g(x_2,x_1)}{x_1 - x_2} + 2(x_1 x_2)^g \frac{h(x_1,x_2)}{x_1 - x_2}$$

② $\mathbb{C}^* \curvearrowright V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k$

$$\lambda_0 : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$t \longmapsto 1$$

$$\lambda_1 : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$t \longmapsto t$$

$$\mathcal{P}_V = \{ \overline{\lambda_0}, \overline{\lambda_1} \}$$

$V^{\lambda_0} = V$, $G^{\lambda_0} = G$, $G_{\lambda_0} = \{1\}$, $k_{\lambda_0} = 1$

$V^{\lambda_1} = pt$, $G^{\lambda_1} = G$, $G_{\lambda_1} = G$, $k_{\lambda_1} = \prod_{k>0} (kx)^{\dim V_k}$
$\in \mathbb{Q}[x]$

$$\mathrm{Ind}_{\lambda_1, \lambda_0} : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$$
$$f(x) \longmapsto \underbrace{k_{\lambda_1}}_{= C_V \cdot x^{\sum_{k>0} \dim V_k}} \cdot f(x).$$

$$P_{\lambda_0} = \mathbb{Q}[x]_{\deg < \sum_{k>0} \dim V_k}$$

$$P_{\lambda_1} = \mathbb{Q}$$

$$P_{\lambda_0} \oplus P_{\lambda_1} \otimes \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$$
$$(f, g) \longmapsto f + k_{\lambda_1} g.$$

6- Renforcements de l'isomorphisme d'intégralité

ⓐ Identifier P_d :

$$X_*(T)^{st} = \{ d \in X_*(T) \mid \bigcup G^d/G_d\text{-orbites fermées} \underset{\text{ouvert}}{\subset} V^d$$

+ stabilisateur fini.

<u>Conjecture</u> :

$$P_d \cong \begin{cases} IH^*(V^d /\!/ G^d) & \text{si } d \in X_*(T)^{st} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

→ Lorsque (G, V) provient d'un carquois symétrique, Meinhard-Reineke ~2014

→ $(G = \mathbb{C}^*, V)$ (H, 2024)

(b) Définir une version faisceautisée des P_λ.

$\pi_\lambda : V^\lambda/G^\lambda \longrightarrow V^\lambda /\!/ G^\lambda$ $\qquad d_\lambda = \dim V^\lambda - \dim G^\lambda$

$$\begin{tikzcd}
 & V^{\lambda\geq 0}/G^{\lambda\geq 0} \arrow[dl, "q_\lambda"'] \arrow[dr, "p_\lambda"] & \\
V^\lambda/G^\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & & V/G \arrow[d, "\pi"] \\
V^\lambda/\!/G^\lambda \arrow[rr, "\iota_\lambda"'] & & V/\!/G
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ind}_\lambda : \quad \iota_{\lambda *} \pi_{\lambda *} \mathbb{Q}_{V^\lambda/G^\lambda}[d_\lambda] \longrightarrow \pi_* \mathbb{Q}_{V/G}[d]$

Théorème (H, 2024)

Il existe des complexes constructible W_λ-equivariants $\mathcal{P}_\lambda$ sur $V^\lambda/\!/G^\lambda$ t.q.

$$\bigoplus_{\tilde\lambda \in \mathcal{P}_V/W} \left(\mathcal{P}_\lambda \otimes H^*_{G_\lambda}(pt)\right)^{\varepsilon_{V,\lambda}} \longrightarrow \pi_* \mathbb{Q}_{V/G}[d]$$

soit un isomorphisme.

Conjecture (renforcement de la version faisceautisée)

$$P_\lambda \simeq \begin{cases} \mathcal{IE}(V^\lambda /\!/ G^\lambda)[-\dim G_\lambda] & \text{si } \lambda \in X_*(T)^{st} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7- Historique

8. Construction des P_λ.